— Se forem vários os índices a dar solução admissível é escolhido o que atribuir menor valor a Z.

— Se não existir solução admissível é escolhido o índice que dê solução o mais próxima possível da admissível.

6.º Paragem final: Os cálculos terminam quando para toda a solução S_q do último caminho percorrido, o conjunto N_q é vazio. Se $\overline{Z} = +\infty$ o problema não tem solução admissível e se $\overline{Z}$, último valor, é finito a solução associada é também a óptima.

7.4. *Exemplo Resolvido*

Para melhor compreensão do algoritmo acabado de expôr e ainda para facilitar a sua programação na linguagem A.P.L., vejamos a resolução do seguinte problema com variáveis booleanas:

Minimize $5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5$ sujeito a

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 \leqslant -2$$

$$2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leqslant 0$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leqslant -1$$

1.ª solução: $S_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ ou $x_1 = \ldots = x_5 = 0$.

— Variáveis de folga: $x^f_{1,0} = -2$; $x^f_{2,0} = 0$; $x^f_{3,0} = -1$

— Valor de Z: por convenção é $Z_0 = +\infty$

— Determinação de N_0: temos de considerar apenas o conjunto E_0 pois estamos na primeira solução

$E_p = \{j: a_{i,j} \geqslant 0$ para simultaneamente $i = \{1,3\} \Rightarrow E_0 = \{2,5\}$

$N_0 = (\{1, 2, 3, 4, 5\} - \emptyset) - \{2,5\} \Rightarrow N_0 = \{1, 3, 4\}$

— Teste de paragem: S_0 não é admissível, N_0 não é vazio e para $i = 1,3$ e $j = 1, 3, 4$ tem-se

$$x^f_{1,0} - \sum_{j \in No} \min(0; a_{i,j}) = -2 - (-1 - 5 - 1) \geqslant 0$$

$$x^f_{3,0} \sum_{j \in No} - \min(0; a_{i,j}) = -1 - (-2 + 0) \geqslant 0$$

e portanto não paramos, continuamos os cálculos

— Escolha do índice r a acrescentar a J_0:

$$\sum_{i=1}^{3} \min(x^f_{i,0} - a_{i,1}; 0) = -1 - 2 - 1 = -4$$

$$\sum_{i=1}^{3} \min(x^f_{i,0} - a_{i,3}; 0) = 0 - 3 + 0 = -3$$

$$\text{Max}(-4, -3, -5) = -3 \Rightarrow r = 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} \min(x^f_{i,0} - a_{i,4}; 0) = -1 - 2 = -5$$

2.ª solução: $S_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$

— Variáveis de folga: $x^f_{i,1} = x^f_{i,0} - a_{i,5} = (-2 + 5; 0 - 3; -1 + 2) = (3, -3, 1)$

— Valor de Z: $Z_1 = +\infty$ pois $x^f_{2,1} = -3$

— Determinação de N_0: também aqui só tem razão de se calcular E_1. Como $i = 2$.

$E_1 = \{1,4\}$ (3 não se considera por pertencer a J_1) $\Rightarrow N_1 = \{2,5\}$

— Teste de paragem: S_1 não admissível, N_1 não vazio e $x^f_{2,1} + 8 \geqslant 0$, portanto não se pára.

— Escolha do índice a juntar a J_1.

$$\sum_{i=1}^{3} \min(x^f_{i,1} - a_{1,2}; 0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow r = 2$$

$$\sum_{i=1}^{3} \min(x^f_{i,1} - a_{1,5}; 0) = -1 - 1 + 0 = -2$$

e logo se vê que a solução seguinte vai ser admissível.

3.ª solução: $S_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$

— variáveis de folga: $x^f_{i,2} = (0, 3, 0)$ e portanto S_2 é admissível.

— Valor de Z: $\overline{Z}_2 = 7 + 10 = 17$.

— Teste de paragem: Como S_2 é admissível paramos.

— Regra do passo atrás: tomamos a solução S_1 que é a primeira em que N_p tem pelo menos dois índices. $N_1 = \{2,5\}$ e como para $j = 2$, S_1 se transformava em S_2, eliminamos este índice de N_1 e fica

$$N'_1 = \{5\}$$

— Teste de paragem: N'_1 não é vazio mas $x^f_{2,1} + 2 = -3 + 2 < 0$ e portanto paramos, não vale a pena examinar a descendente de S_1 que seria (0, 0, 1, 0, 1).

— Regra do passo atrás: Voltamos à solução S_0 que tem $N_0 = \{1, 3, 4,\}$. Como para $j = 3$, S_0 passava a S_1 já vista, vém

$$N'_0 = \{1,4\}$$

— Teste de paragem:

$$x_{1,0} + 1 + 1 = 0; \; x^f_{3,0} + 0 + 0 = -1 < 0$$

portanto paramos pois não poderiamos obter outra solução admissível nas descendentes de (0, 0, 0, 0, 0).

— Teste de paragem final: Como teriamos de voltar atrás e não existe mais nenhuma solução anterior a S_0, N_q considera-se vazio, os cálculos terminam e a única solução admissível (a anterior) é a solução óptima

$$(0, 1, 1, 0, 0) \quad \text{ou} \quad x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;$$

$$x_4 = 0;\ x_5 = 0 \text{ e } z = 17$$

7.5 *Programação do Algoritmo de Balas*

Convém em primeiro lugar assentar no significado das variáveis mais importantes utilizadas e indicação do processo seguido para conseguirmos a numeração das diversas soluções e conjuntos:

SP — Representa a solução S_p. É um vector que toma inicialmente o vazio e vão-se-lhe catenando c elementos constituídos por o ou/e 1 à medida que se passa para novas soluções. Este processo torna fácil a recuperação de uma certa solução mediante a indexação (SP[(c×k)+ + ⍵c] onde k pode variar de o a p. Um processo semelhante se usa para NP e FP que designam, respectivamente, o conjunto N_p e as variáveis de folga x_i^f

FNP — Variáveis de folga negativas para cada solução.

AA — Matriz A sem os termos independentes.

KP — Vector lógico formado pelos índices que juntos à solução S_p dão soluções já examinadas antes de S_p. É usado na formação do conjunto N_p.

S — Número de variáveis de folga negativas.

Z — Valor da função objectivo correspondente a uma solução, admissível ou não.

NU — Vector lógico para a formação do conjunto N_p e $N'_{q,t}$.

TDP — Vector lógico que interpreta $x_{i,p}^f - \sum_{j \in Np} \min(0;\ a_{i,j}) < 0$ para i tal que $x_{i,p}^f < 0$ e com p índice de N_p, no teste de paragem.

NPR — Conjunto dos índices j de cada conjunto N_p.

TDI — Vector numérico que interpreta $\max_{j \in Np} \left[\sum_{i=1}^{m} \min(x_{i,p}^f - a_{i,j};\ 0) \right]$ no teste de escolha do índice.

INDEX — Vector lógico que contém o índice escolhido.

SS — Última solução admissível.

ZZ — Valor Z correspondente à última solução admissível.

N — Número de índices do conjunto $N_{q,t}$ correspondente à solução $S_{q,t}$, anterior a S_p.

M — Matriz auxiliar na regra do passo atrás e constituída pelas soluções possíveis de obter pela junção dos índices de $N_{q,t}$ à solução $S_{q,t}$.

MM — Matriz formada pelas soluções desprezadas (soluções posteriores a $S_{q,t}$.

Apresentamos agora o algoritmo em questão com o nome BALAS e, para uma mais rápida compreensão futura, indicaremos resumidamente os cálculos efectuados por cada linha.

A BALAS B

Valores iniciais de NP, FP e SP, vazio, de k, zero, e de ZZ, valor máximo que tem a função de infinito.

```
[ 1]  NP←FP←SP←⍵K←0 × ZZ←⌊/⍵0
```

Cálculo dos escalares L, C e D.

```
[ 2]  L←(⍴ A)[1] ; C←  ¯1 + D←(⍴ A) [2]
```

Atribuição de novos valores a SP, NP e FP; definição de AA e valor inicial de KP.

```
[ 3]  KP←NP←NP, SP←SP, C⍴0; AA←A[;⍵C];
      FP←FP, A[; D]
```

Tomada das variáveis de folga negativas, FNP, e sua contagem, S.

```
[ 4]  S←+/G; FNP←(G←FP[LL] < 0)/
      /FP[LL←(L × K) + ⍵L]
```

A solução é admissível? Se é, salto para [17]; definição de Z e dos índices CC e CN de, respectivamente, SP e NP.

```
[ 5]  →(0 = S)/17; Z←SP[CC]× B; CN←C +
      + CC←(C × K) + ⍵ C
```

Se K = 0, salto para [8] sem o cálculo de KP.

```
[ 6]  →(K = 0)/8
```

Cálculo do conjunto KP, referente a soluções já examinadas.

```
[ 7]  KP← + ⌿ ((K, C)⍴SP[⍵C × K])∧. =
      ∅((C,C)⍴SP[CC]) + (⍵C)∘. = ⍵ C
```

Cálculo do conjunto N_{p+1} a partir de NU e sua catenação com N_p.

```
[ 8]  NP←NP[⍵C × K + 1], (NU←0 = ((S = +
      + ⌿ 0<AA[G/⍵L;]) + SP [CC] + (ZZ<Z +
      + B × ~ SP[CC]) + KP) × ⍵C
```

Teste de paragem e definição de NPR [9]; salto para [15] no caso de paragem.

```
[ 9]  TDP←0>FNP−, ⌿ /0⌊AA[G/⍵L;
      NPR←NU/NP[CN]]
[10]  →((0 = +/NPR) v (v/TDP))/15
```

Teste de escolha do índice.

[11] TDI← + ⌿ 0L.(⍉((ρNPR), L)ρ FP[LL]) −
− AA[; NPR]

Nova solução S_p e sua catenação com a anterior.

[12] SP←SP[ɜC × K + 1], SP[CC] +
+ INDEX←NPR[TDIɜ /TDI] = ɜ C

Novas variáveis de folga $x^f_{i,p+1}$ e sua catenação com as anteriores.

[13] FP←FP[ɜ L × K + 1], FP[LL] − ,INDEX/AA

Numeração das soluções e regresso a [4].

[14] →4, K←K + 1

Condições de irresolubilidade; se não há solução, salto para [30].

[15] →((0 = +/NPR) ∧ S > 0)/30

Fixação de K por KK e salto para [18].

[16] →18, KK←K

Solução admissível SS e correspondente Z, ZZ; Saída de SS.

[17] ZZ←B + . × ⎕ ←SS←SP[CC]; KK←K

Regra do passo atrás: tomada de NP com pelo menos dois índices.

[18] N←ρ RR←(NN = ɜ C)/
/NN←NP[CN←(C × K) + ɜ C]

[19] →(2≤N)/22

[20] →(0≠1 + K←K − 1)/18

Se SP é admissível e não há conjunto NP com pelo menos dois índices, sai a solução.

[21] →((K = − 1) ∧ (2>N) ∧ S = 0)/27

Definição da matriz M e fixação de novos índices CC.

[22] M←⍉ (RR∘. = ɜ C) + (N, C)ρ SP[CC];
CC←CN − C

Formação da matriz MM das soluções desprezadas e fixação de K para o novo caminho.

[23] MM←((KK − K),C)ρ SF←⍉ (⍉ SP) [ɜ C ×
× KK − K]; K←K − 1

Definição de NU, vector usado na definição de $N'_{q,t}$

[24] NU← + ⌿ ((~(+ ⌿ MM ∧ .= M)vZZ<B +.×
× M)/RR)∘. = ɜ C

Definição do novo vector NP com inclusão dos índices de $N'_{q,t}$ e desprezo dos N_p seguintes.

[25] NP←NP[ɜ C × K + 1], NU × NP [CN]

Definição das variáveis de folga negativas para a nova solução S_q e salto para [9].

[26] →9, FNP←(G←FP[LL]<0)/
/FP[LL←(L × K) + ɜ L]

Saída dos resultados.

[27] 'VALOR OPTIMO ='; ZZ

[28] 'SOLUÇÃO OPTIMA ='; SS

[29] → 0

[30] 'NÃO TEM SOLUÇÃO'

∇

Apresentam-se a seguir os cálculos efectuados na resolução de alguns problemas:

```
      ∇BALAS[⎕]∇

    ∇ A BALAS B
[1]   NP←FP←SP←⍳K←0×ZZ←L/⍳0
[2]   L←(pA)[1];C←¯1+D←(pA)[2]
[3]   KP←NP←NP,SP←SP,C⍴0;AA←A[;⍳C];FP←FP,A[;D]
[4]   S←+/G;FNP←(G←FP[LL]<0)/FP[LL←(L×K)+⍳L]
[5]   →(0≠S)/17;Z←SP[CC]×B;CN←C+CC←(C×K)+⍳C
[6]   →(K=0)/8
[7]   KP←+⌿((K,C)⍴SP[⍳C×K])∧.=⍉((C,C)⍴SP[CC])+(⍳C)∘.=⍳C
[8]   NP←NP[⍳C×K+1],(NU←0=((S=+⌿0<AA[G/⍳L;])+SP[CC])+(ZZ<Z+B+.×SP[CC])+KP)×⍳C
[9]   TDP←0>FNP-.+/0LAA[G/⍳L;NPR+NU/NP[CN]]
[10]  →((0=+/NPR)∨(∨/TDP))/15
[11]  TDI←++⌿0L(⍉((⍴NPR),L)⍴FP[LL])-AA[;NPR]
[12]  SP←SP[⍳C×K+1],SP[CC]+INDEX←NPR[TDI[⍋TDI]]×⍳C
[13]  FP←FP[⍳L×K+1],FP[LL]-,INDEX/AA
[14]  →4,K←K+1
[15]  →((0=+/NPR)∧S>0)/30
[16]  →18
[17]  ZZ←B+.×⎕←SS←SP[CC];KK←K
[18]  N←⍴RR←(NN=⍳C)/NN←NP[CN←(C×K)+⍳C]
[19]  →(2≤N)/22
[20]  →(0≠1+K←K-1)/18
[21]  →((K=-1)∧(2>N)∧S=0)/27
[22]  M←⍉(NN∘.=⍳C)+(N,C)⍴SP[CC←(C×K)+⍳C];K←K-1
[23]  MM←((KK-K),C)⍴SP←⍉(⍉SP)[⍳C×KK-K]
[24]  NU←+⌿((~(+⌿MM∧.=M)∨ZZ<B+.×M)/RR)∘.=⍳C
[25]  NP←NP[⍳C×K+1],NU×NP[CN]
[26]  →9,FNP←(G←FP[LL]<0)/FP[LL←(L×K)+⍳L]
[27]  '  VALOR OPTIMO=';ZZ
[28]  'SOLUCAO OPTIMA=';SS
[29]  →0
[30]  'NAO TEM SOLUCAO'
    ∇

      A
  ¯1   3  ¯5  ¯2
   2  ¯6   3   0
   0   1  ¯2  ¯1
      B
5  7  10
      T←BALAS←⍳30
      A BALAS B
BALAS[1]
BALAS[2] 33
BALAS[3] 0  0  0
  ¯1   3  ¯5
   2  ¯6   3
   0   1  ¯2 ¯2  0  ¯1
BALAS[4] 2 ¯2  ¯1
BALAS[5] 0  0  04  5  6
BALAS[6] 8
BALAS[8] 0  0  0  1  0  3
BALAS[9] 0  0
BALAS[10]
BALAS[11] ¯4  ¯3
BALAS[12] 0  0  0  0  0  1
BALAS[13] ¯2  0  ¯1  3  ¯3  1
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 1 ¯3
BALAS[5] 0  0  107  8  9
BALAS[6]
BALAS[7] 0  0  0
BALAS[8] 0  0  0  1  0  3  0  2  0
BALAS[9] 0
BALAS[10]                                    9
BALAS[11] 0
BALAS[12] 0  0  0  0  0  1  0  1  1
BALAS[13] ¯2  0  ¯1  3  ¯3  1  0  3  0
BALAS[14] 4  2
BALAS[4] 0
BALAS[5] 170  7  1010  11  12
0  1  12
BALAS[17] 172
BALAS[18] 1
BALAS[19]
BALAS[20] 18
BALAS[18] 2
BALAS[13] 22
BALAS[22]
    1    0
    0    0
    0   11  2  3
BALAS[23]
    0    0    1
    0    1   10
BALAS[24] 1  0  0
BALAS[25] 0  0  0  1  0  0
BALAS[26] 9  ¯2  ¯1
BALAS[9] 1  1
BALAS[10] 15
BALAS[15]
BALAS[16] 180
BALAS[18] 0
BALAS[19]
BALAS[20]
BALAS[21] 27
BALAS[27]   VALOR OPTIMO=17
BALAS[28] SOLUCAO OPTIMA=0  1  1
BALAS[29] 0
```

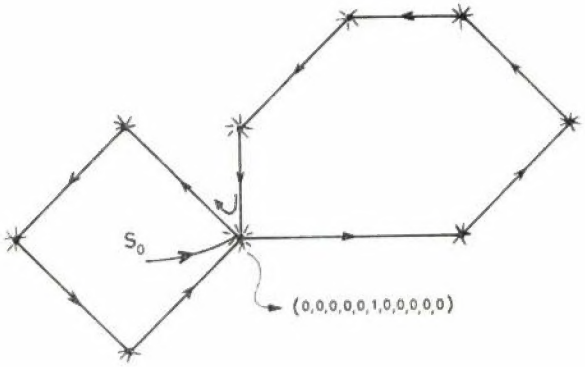
```
      A
   ¯1    3   ¯5   ¯1    4   ¯2
    2   ¯6    3    2   ¯2    0
    0    1   ¯2    1    1   ¯1
      B
5  7  10  3  1

      A BALAS B

BALAS[1]
BALAS[2] 35
BALAS[3] 0  0  0  0  0
   ¯1    3   ¯5   ¯1    4
    2   ¯6    3    2   ¯2
    0    1   ¯2    1    1¯2  0  ¯1
BALAS[4] 2¯2  ¯1
BALAS[5] 0  0  0  0  06  7  8  9  10
BALAS[6] 8
BALAS[8] 0  0  0  0  0  1  0  3  4  0
BALAS[9] 0  0
BALAS[10]
BALAS[11] ¯4  ¯3  ¯5
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  0  1  0  0
BALAS[13] ¯2  0  ¯1  3  ¯3  1
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 1¯3
BALAS[5] 0  0  10  0  011  12  13  14  15
BALAS[6]
BALAS[7] 0  0  0  0  0
BALAS[8] 0  0  0  0  0  1  0  3  4  0  0  2  0  0  5
BALAS[9] 0
BALAS[10]
BALAS[11] 0  ¯2
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  1  1  0  0
BALAS[13] ¯2  0  ¯1  3  ¯3  1  0  3  0
BALAS[14] 4  2
BALAS[4] 0
BALAS[5] 170  7  10  0  016  17  18  19  20
BALAS[17] 172
BALAS[18] 2
BALAS[19]
BALAS[20] 18
BALAS[18] 3
BALAS[19]
BALAS[20] 18
BALAS[18] 0
BALAS[19] 21
BALAS[21] 27
BALAS[27]   VALOR OPTIMO=17
BALAS[28] SOLUCAO OPTIMA=0  1  1  0  0
BALAS[29]


      YY

  ¯64  ¯32  ¯16   ¯8  ¯88  ¯44  ¯22  ¯11  ¯72  ¯36  ¯18   ¯9  ¯12
  ¯16   ¯8   ¯4   ¯2  ¯16   ¯8   ¯4   ¯2  ¯56  ¯28  ¯14   ¯7  ¯14
  ¯72  ¯36  ¯18   ¯9  ¯48  ¯24  ¯12   ¯6  ¯24  ¯12   ¯6   ¯3  ¯10
    1    1    1    1    0    0    0    0    0    0    0    0    2
    0    0    0    0    1    1    1    1    0    0    0    0    2
    0    0    0    0    0    0    0    0    1    1    1    1    2

      WW
80  40  20  10  32  16  8  4  168  84  42  21

      T&BALAS←⍳30
      YY BALAS WW


BALAS[1]
BALAS[2] 612
BALAS[3] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
  ¯64  ¯32  ¯16   ¯8  ¯88  ¯44  ¯22  ¯11  ¯72  ¯36  ¯18   ¯9
  ¯16   ¯8   ¯4   ¯2  ¯16   ¯8   ¯4   ¯2  ¯56  ¯28  ¯14   ¯7
  ¯72  ¯36  ¯18   ¯9  ¯48  ¯24  ¯12   ¯6  ¯24  ¯12   ¯6   ¯3
    1    1    1    1    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    1    1    1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    1    1    1    1¯12  ¯14  ¯10  2  2  2
BALAS[4] 3¯12  ¯14  ¯10
BALAS[5] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  013  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24
BALAS[6] 8
BALAS[8] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12
BALAS[9] 0  0  0
BALAS[10]
BALAS[11] 0  ¯6  ¯10  ¯17  0  ¯6  ¯10  ¯17  0  0  ¯4  ¯17
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
BALAS[13] ¯12  ¯14  ¯10  2  2  2  52  2  62  1  2  2
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 0
BALAS[5] 1780  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  025  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36
1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  01
BALAS[17] 801
BALAS[18] 12
BALAS[19] 22
WS FULL
BALAS[22] M←⍉(RR=.=⍳C)+(N,C)⍴SP[CC];CC←CN-C
                ^
      )ERASE TT TTT NN NU NPR
      →22
WS FULL
BALAS[22] M←⍉(RR=.=⍳C)+(N,C)⍴SP[CC];CC←CN-C
                ^
      )ERASE TT TTT NU NPR INDEX TDI TDP G FNP
      →22
BALAS[22]
    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    11  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12
```

```
BALAS[23]
    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    00
BALAS[24] 0  1  1  1  1  1  1  1  0  0  1  1
BALAS[25] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  2  3  4  5  6  7  8  0  0  11  12
BALAS[26] 9  ¯12  ¯14  ¯10
BALAS[9] 0  0  0
BALAS[10]
WS FULL
BALAS[11] TDI←+⌿0⌊(⍉((⍴NPR),L)⍴FP[LL])-AA[;NPR]
                    ^
      )M MM N NN NU RR
INCORRECT COMMAND
      )ERASE M MM N NN NU RR
      →11
BALAS[11] ¯6  ¯10  ¯17  0  ¯6  ¯10  ¯17  ¯4  ¯17
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0
BALAS[13] ¯12  ¯14  ¯10  2  2  2  76  2  38  2  1  2
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 0
BALAS[5] 170  0  0  0  32  0  0  0  0  0  0  025  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36
0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  01
BALAS[17] 321
BALAS[18] 9
BALAS[19] 22
BALAS[22]
    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    1    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    1    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    1    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    11  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12
BALAS[23]
    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    00
BALAS[24] 0  0  1  1  0  1  1  1  0  0  0  1
BALAS[25] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  3  4  0  6  7  8  0  0  0  12
BALAS[26] 9  ¯12  ¯14  ¯10
BALAS[9] 0  0  0
BALAS[10]
BALAS[11] ¯10  ¯17  ¯6  ¯10  ¯17  ¯17
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0
BALAS[13] ¯12  ¯14  ¯10  2  2  2  32  ¯6  14  2  1  2
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 1¯6
BALAS[5] 0  0  0  0  0  16  0  0  0  0  0  025  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36
BALAS[6]
WS FULL
BALAS[7] KP←+⌿((K,C)⍴SP[⍳C×K])∧.=⍉((C,C)⍴SP[CC])+(⍳C)∘.=⍳C
                                                        ^
      )ERASE M MM NN N NU RR
      →7

WS FULL
BALAS[7] KP←+⌿((K,C)⍴SP[⍳C×K])∧.=⍉((C,C)⍴SP[CC])+(⍳C)∘.=⍳C
                                          ^
      )ERASE M MM N NN NU RR TDI TDP NPR INDEX
      →7


      YY
 ¯64  ¯32  ¯16  ¯8  ¯88  ¯44  ¯22  ¯11  ¯72  ¯36  ¯18  ¯9  ¯12
 ¯16  ¯8  ¯4  ¯2  ¯16  ¯8  ¯4  ¯2  ¯56  ¯28  ¯14  ¯7  ¯14
 ¯72  ¯36  ¯18  ¯9  ¯48  ¯24  ¯12  ¯6  ¯24  ¯12  ¯6  ¯3  ¯10
   1    1    1    1    0    0    0    0    0    0    0    0    2
   0    0    0    0    1    1    1    1    0    0    0    0    2
   0    0    0    0    0    0    0    0    1    1    1    1    2

      WW
80  40  20  10  32  16  8  4  168  84  42  21


      YY BALAS WW

1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  01
0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  01
WS FULL
BALAS[22] M←⍉(RR∘.=⍳C)+(N,C)⍴SP[CC];CC+CN-C
                ^
      )ERASE YY WW FNP TDI TDP M MM NU SS G S ZNPR
      →22


0  0  0  0  1  1  0  0  0  0  0  02
0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  12
0  0  1  1  0  1  0  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  0  1  0  0  0  03
0  1  0  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  0  1  0  1  1  0  0  0  0  03
NAO TEM SOLUCAO
```

A programação do Algoritmo Balas ofereceu-nos diversas dificuldades dada a quantidade de cálculos a efectuar na análise de cada uma das soluções e o programa apresentado é o resultado de diversos melhoramentos introduzidos em programas inicialmente obtidos. O primeiro programa escrito resolvia apenas determinados problemas pois mostrava-se incapaz de atingir a solução óptima em problemas de número mais elevado de variáveis, muito embora não acusasse qualquer erro.

Essa incapacidade resultava do facto de não estarem bem definidas as condições a atender para a selecção ou desprezo de um certo índice pois notou-se que os cálculos se tornavam intermináveis.

Procedendo-se à saída das consecutivas soluções admissíveis (⎕ ←SS) constatou-se que elas se repetiam a determinada altura segundo uma certa cadência, o que fazia supôr não ter sido desprezado um certo índice. O fluxo dos cálculos não saía da mesma zona do grafo (ver esquema):



Então foi-se procedendo às correcções que nos pareceram necessárias, mas a inserção de mais cálculos relativamente longos fez com que a memória do computador se esgotasse com muita facilidade tornando mais difícil detectar outros possíveis erros.

De qualquer modo não tomamos esta função por definitiva e será futuramente alvo da nossa atenção até que fiquemos com a certeza de interpretar correctamente o algoritmo de Balas. Além disso temos em mente aumentar-lhe a rapidez de cálculo por A. Geoffrion. Apresentamos no entanto um programa melhorado que pelo menos foi capaz de resolver os problemas que de momento lhe pusemos:

GASS, SAUL J. (1972): *Programacion Lienal*, C. E. C. S. A., México.

SIMONNARD, MICHEL (1973): *Programmation Linéaire*, DUNOD, Paris.

PUCCINI, ABELARDO DE LIMA (1972): *Introdução à Programação Linear*. AO LIVRO TÉCNICO S. A., Rio de Janeiro.

DORFMAN — SAMUELSON — SOLOW (1969): *Programacion Lienal y Analisis Económico*, Aguilar S. A. Editiones, Madrid.

SOUSA, J. A. MALATO de (1972): *Programação Linear e Aplicações na Gestão Agrária*, Universidade de Coimbra.

ROBINET, BERNARD (1971): *Le Laugage A. P. I.* Éditions Techniq, Paris.


```
      ⍞BALAS[⎕]⍞

    ∇ A BALAS B
[1]   NP←FP←SP←⍳K←0×ZZ←⌊/⍳0
[2]   L←(⍴A)[1];C←¯1+D←(⍴A)[2]
[3]   SP←NP←VP,SP←SP,Cp0;AA←A[;⍳C];FP←FP,A[;D]
[4]   S←+/G;FNP←(G×FP[LL]<0)/FP[LL←(L×K)+⍳L]
[5]   →(0=S)/17;Z←SP[CC]×B;CN←C+CC←(C×K)+⍳C
[6]   →(K=0)/8
[7]   KP←+/((K,C)⍴SP[⍳C×K])∧.=⍉((C,C)⍴SP[CC])+(⍳C)∘.=⍳C
[8]   NP←NP[⍳C×K+1],(NU←0=((2=+/0<AA[G/⍳L;1])+BP[CC])+(ZZ<Z+B×-SP[CC])+KP)×⍳C
[9]   TDP←0>FNP-.+/0⌊AA[G/⍳L;NPR←NU/NP[CN]]
[10]  →((0=+/NPR)∨(∨/TDP))/15
[11]  TDI←+/0⌊(⍉((⍴NPR),L)⍴FP[LL])-AA[;NPR]
[12]  SP←SP[⍳C×K+1],SP[CC]+INDEX←NPR[TDI⍳(⍳⍴TDI)]×C
[13]  FP←FP[⍳L×K+1],FP[LL]-.INDEX/AA
[14]  →4,K←K+1
[15]  →((0=+/SPR)∧S>0)/30
[16]  →18;KK←K
[17]  ZZ←B+.×⎕←SS←SP[CC];KK←K
[18]  B←pBR+(NN←⍳C)/BN←NP[CN+(C×K)+⍳C]
[19]  →(2≤N)/22
[20]  →(0≠1+K←K-1)/18
[21]  →((K=-1)∧(2>N)∧S=0)/27
[22]  W←⍉(RR+.=⍳C)+(N,C)⍴SP[CC];CC←CN-C
[23]  MM←((KK-K),C)⍴SP←⍉(⍋SP)[⍳C×KK-K];K←K-1
[24]  NU←+/((-(+/MM∧.=M)∨ZZ<B+.=M)/RR)+.=⍳C
[25]  BP←NP[⍳C×K+1],NU×NP[CN]
[26]  →9,FNP←(G←FP[LL]<0)/FP[LL←(L×K)+⍳L]
[27]  '  VALOR OPTIMO=';ZZ
[28]  'SOLUCAO OPTIMA=';S
[29]  →0
[30]  'NAO TEM SOLUCAO'
    ∇
```

```
      YY BALAS WW
1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  01
WS FULL
BALAS[11] TDI←+/0⌊(⍉((⍴NPR),L)⍴FP[LL])-AA[;NPR]
                                ∧
      )VARD
          ∨
          S
WW TT TTT S T YY ZZ K SP FP NP D C L AA KP LL G FNP CC CN Z NU
              MM
      )ERASE WW YY TT TTT KP FNP NU TDP RR N M MM
      →11
0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  01
0  0  0  0  1  1  0  0  0  0  0  02
0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  12
0  0  1  1  0  1  0  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  0  1  0  0  0  03
0  1  0  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  0  1  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  1  0  0  0  0  0  0  02
0  1  1  0  0  1  0  0  0  0  0  03
0  0  1  1  0  1  0  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  0  1  0  0  0  03
0  0  0  0  1  0  1  0  0  0  0  02
0  1  0  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  0  1  0  1  1  0  0  0  0  03
0  0  1  0  0  0  1  0  0  0  0  13
0  0  0  0  0  1  1  0  0  0  0  13
0  1  0  1  0  0  1  0  0  0  0  14
0  0  1  1  0  0  1  0  0  0  0  14
0  0  0  1  0  1  1  0  0  0  0  14
0  0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  14
  VALOR OPTIMO=43
SOLUCAO OPTIMA=0  0  0  1  0  0  1  1  0  0  0  1
```

```
      A
   ¯3   ¯2    1   ¯4    0
   ¯2   ¯3   ¯4    1   ¯2
    1   ¯1    1   ¯1    7
   ¯1    2   ¯1   ¯1    9
      B
5  2  2  1

      A BALAS B
BALAS[1]
BALAS[2] 44
BALAS[3] 0  0  0  0
   ¯3   ¯2    1   ¯4
   ¯2   ¯3   ¯4    1
    1   ¯1    1   ¯1
   ¯1    2   ¯1   ¯10  ¯2  7  9
BALAS[4] 1¯2
BALAS[5] 0  0  0  05  6  7  8
BALAS[6] 8
BALAS[8] 0  0  0  0  1  2  3  0
BALAS[9] 0
BALAS[10]
BALAS[11] 0  0  ¯1
BALAS[12] 0  0  0  0  1  0  0  0
BALAS[13] 0  ¯2  7  9  3  0  5  10
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 0
BALAS[5] 175  0  0  09  10  11  12
1  0  0  01
BALAS[17] 51
BALAS[18] 3
BALAS[19] 22
BALAS[22]
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
    0    0    01  2  3  4
BALAS[23]
    1    0    0    00
BALAS[24] 0  1  1  0
BALAS[25] 0  0  0  0  0  2  3  0
BALAS[26] 9  ¯2
BALAS[9] 0
BALAS[10]
BALAS[11] 0  ¯1
BALAS[12] 0  0  0  0  0  1  0  0
BALAS[13] 0  ¯2  7  9  2  1  8  7
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 0
BALAS[5] 170  2  0  09  10  11  12
0  1  0  01
BALAS[17] 21
BALAS[18] 2
BALAS[19] 22
BALAS[22]
    0    0
    1    0
    0    1
    0    01  2  3  4
BALAS[23]
    0    1    0    00
BALAS[24] 0  0  1  0
BALAS[25] 0  0  0  0  0  0  3  0
BALAS[26] 9  ¯2
BALAS[9] 0
BALAS[10]
BALAS[11] ¯1
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  1  0
BALAS[13] 0  ¯2  7  9  ¯1  2  6  10
BALAS[14] 4  1
BALAS[4] 1¯1
BALAS[5] 0  0  2  09  10  11  12
BALAS[6]
BALAS[7] 0  0  0  0
BALAS[8] 0  0  0  0  0  0  3  0  0  2  0  4
BALAS[9] 0
BALAS[10]
BALAS[11] 0  0
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  1  0  0  1  1  0
BALAS[13] 0  ¯2  7  9  ¯1  2  6  10  1  5  7  8
BALAS[14] 4  2
BALAS[4] 0
BALAS[5] 170  2  2  013  14  15. 16
0  1  1  02
BALAS[17] 42
BALAS[18] 2
BALAS[19] 22
BALAS[22]
    0    0
    1    0
    1    1
    0    15  6  7  8
BALAS[23]
    0    1    1    01
BALAS[24] 0  0  0  1
BALAS[25] 0  0  0  0  0  0  3  0  0  0  0  4
BALAS[26] 9  ¯1
BALAS[9] 0
BALAS[10]
BALAS[11] 0
BALAS[12] 0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  1  1
BALAS[13] 0  ¯2  7  9  ¯1  2  6  10  3  1  7  11
BALAS[14] 4  2
BALAS[4] 0
BALAS[5] 170  0  2  113  14  15  16
0  0  1  12
BALAS[17] 32
BALAS[18] 1
BALAS[19]
BALAS[20] 18
BALAS[18] 1
BALAS[19]
BALAS[20] 18
BALAS[18] 0
BALAS[19]
BALAS[20]
BALAS[21] 27
BALAS[27]   VALOR OPTIMO=3
BALAS[28] SOLUCAO OPTIMA=0  0  1  1
BALAS[29] 0
```

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
International Symposium on Freight Pipeline — Under the sponsorship of the U. S. Department of transportation, the Department of Civil and Urban Engineering at the University of Pennsylvania will conduct an International Symposium on Freight Pipeline in Washington, D. C. on December 5 - 7, 1976. A number of international exports have been invited to present papers on various aspects of the subject including slurry, pneumatic, and capsule pipelines. Anyone interested in the symposium should contact I. Zandi, Room 113-A Towne Building/D3, University of Pensylvania, Philadelphia, PA 19174	Washington, U. S. A. 5 - 7 December 1976
Tráfego, Segurança e Traçado de Estradas	L. N. E. C. — Lisboa 4.º Trimestre de 1976
Codificação e Automatização da Informação do Projecto	L. N. E. C. — Lisboa
Áreas Residenciais Urbanas	L. N. E. C. — Lisboa 2.ª Fase — Novembro - 1976 3.ª Fase — 1.º Trimestre de 1977
International Product Innovation Congress and Exhibition	Dusseldorf — R. F. A. Fevereiro - 77
International Conference of the Tool and Die Industrye	Viena — Áustria Maio - 77
IV Assemblea General del Centro National de Investigaciones	Madrid — Espanha 31 de Maio a 31 de Junho - 1977
Third International Symposium in Hidrology	Colorado State University — U. S. A. 27 a 29 de Junho - 1977
The Second International Conference on Transfer of Water Resources Information	Colorado State University — U. S. A. 30 de Junho a 2 de Julho - 77
Faire International Soudage et Découpage	ESSEN — R. F. A. 21 a 28 de Setembro - 77
L 'INTERPACK' 78 — 8.ª Feira Internacional de Máquinas de Embalar	DÜSSELDORF 8 a 14 de Junho - 78
1 ière Foire Specialisée International sur la Téchnique Siderurgique	Dusseldorf — R. F. A. Junho - 1979

C. D. U. 532.7:002

Sobre o problema da Difusão de Rutherford

J. C. CONTE
(Investigador do I. A. C. — Prof. Aux. equiparado do I. S. T.) Centro de Química Física Molecular das Universidades Lisboa — Complexo Interdisciplinar — Instituto Superior Técnico — Av. Rovisco Pais — Lisboa.

ABSTRACT

The problem of the interaction between two positively charged particles of which one is assumed to be in rest is discussed. The general equation of the trajectory of the moving particle is deduced for given conditions for mass and initial velocity of the incident particle, electrical charge and impact parameter. As a particular case the case where the impact paramenter is zero is discussed.

RESUMO

Discute-se o problema da interacção de uma partícula de carga eléctrica positiva que se aproxima de outra partícula também de carga eléctrica positiva mas suposta em repouso. É deduzida a equação genérica da trajectória em função da velocidade inicial e da massa da partícula incidente, das cargas das partículas e do parâmetro de choque. Em particular considera-se o caso de o parâmetro de choque ser nulo.

1. *Introdução*

No curso de Elementos de Física Atómica que foi leccionado no Instituto Superior Técnico até ao ano lectivo de 1969-70 eram estudados com um certo detalhe vários modelos atómicos. E, sempre que possível, faziam-se nas aulas práticas problemas de aplicação.

Assim, a propósito do modelo atómico de Rutherford e sabida a importância que para a elaboração desse modelo tiveram as experiências de deflexão de um feixe de partículas α por alvos metálicos finos eram propostos aos alunos alguns problemas simples de interacção entre cargas eléctricas. Num desses problemas pedia-se para determinar a menor distância r_0 a que uma partícula de massa m, velocidade inicial v_0 e carga $Z'e$ positiva (sendo Z' um número inteiro e *e* o módulo da carga do electrão) se podia aproximar de uma outra partícula com carga *Ze* também positiva suposta em repouso, admitindo-se que a direcção da velocidade inicial da partícula incidente passava pela partícula em repouso.

Como é evidente, neste caso a energia cinética inicial da partícula incidente e que a uma distância suficientemente grande da partícula com a qual ela iria interactuar era a sua energia total deveria ser convertida progressivamente em energia potencial, à medida que a distância entre as duas partículas diminuía, mantendo-se constante a soma da energia cinética e da energia potencial. Para a distância r_0 e atendendo às condições do problema a energia cinética deveria anular-se e a energia total da partícula incidente ser a energia potencial do campo de Coulomb. Isto é, deveria ter-se

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{ZZ'e^2}{r_0} \tag{1}$$

ou seja

$$r_0 = \frac{2\, ZZ'e^2}{m\, v_0^2} \tag{2}$$

Introduzindo

$$k = \frac{ZZ'e^2}{m} \tag{3}$$

pode escrever-se para a distância mínima pretendida

$$r_0 = \frac{2\,|k}{v_0^2} \tag{4}$$

Procurando generalizar o problema, considerava-se em seguida o caso em que a direcção inicial do movimento não passava pela posição da partícula em repouso. Nestas circunstâncias a trajectória descrita pela partícula incidente seria um ramo de hipérbole ocupando a partícula em repouso o foco mais afastado (figura 1). A aplicação do princípio da conservação da energia

para o ponto em que a partícula incidente se encontrava à menor distância possível do foco (o vértice da hipérbole) conduz à equação

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_{min}^2 + \frac{ZZ'e'^2}{r_{min}} \tag{5}$$

sendo v_{min} o módulo da velocidade da partícula incidente nesse ponto. Por outro lado, tratando-se de um movimento central era conhecido que o momento angular se devia conservar constante. Assim sendo e porque no vértice da hipérbole a direcção da velocidade era perpendicular a r_{min}, a aplicação do princípio de conservação do momento angular em relação ao foco conduz a

$$m\ v_o\ b = m\ v_{min}\ r_{min} \tag{6}$$

em que b (parâmetro de choque) é a distância entre o foco e a direcção da velocidade inicial da partícula incidetne.

Atendendo a (3) a equação (5) pode escrever-se

$$v_o^2 = v^2_{min} + \frac{2k}{r_{min}} \tag{7}$$

o que mostra que, como seria de esperar r_{min} se reduz a r_o definido por (4) quando as condições da interacção são tais que v_{min} se anula.

Ora das propriedades da hipérbole sabe-se que os triângulos [VAO] e [BFO] indicados na figura 1 são iguais. Então

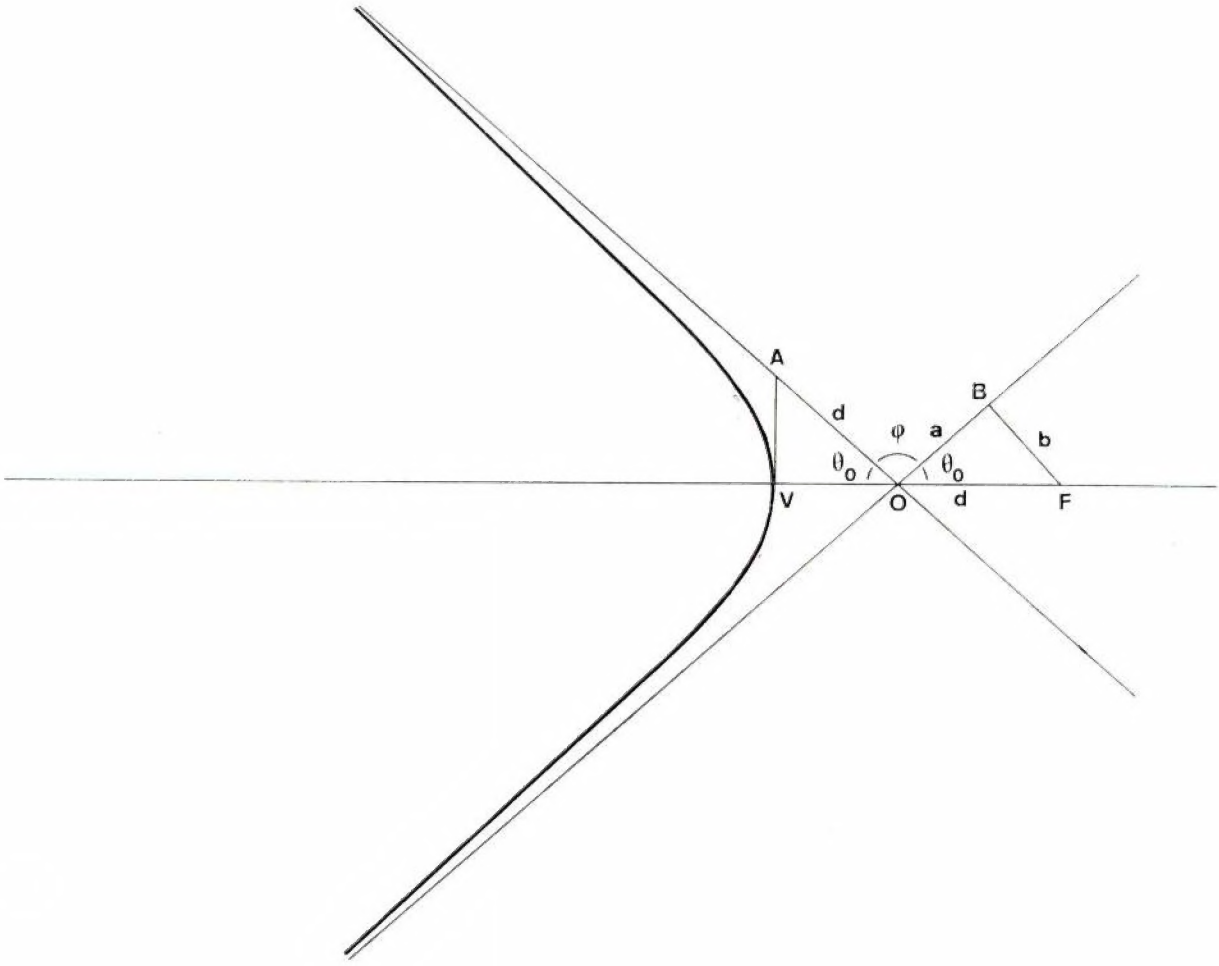


Figura 1

$$r_{min} = d\,(1 + \cos\theta_0) \qquad (8)$$

Mas sendo

$$d = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta_0} \qquad (9)$$

pode ainda escrever-se

$$r_{min} = b\,\frac{1 + \cos\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0} \qquad (10)$$

Substituindo em (7) vem

$$\frac{v^2_{min}}{v^2_0} = 1 - \frac{2\,k}{v^2_0\,b}\,\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{1 + \cos\theta_0} \qquad (11)$$

De (6) e atendendo também a (10),

$$\frac{v_{min}}{v^2_0} = \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{1 + \cos\theta_0} \qquad (12)$$

Quadrando e substituindo em (11) virá

$$\frac{1 + \cos\theta_0}{1 + \cos\theta_0} = 1 - \frac{2\,k}{v^2_0\,b}\,\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{1 - \cos\theta_0} \qquad (13)$$

ou seja

$$\cot\theta_0 = \frac{k}{v^2_0\,b} \qquad (14)$$

Dado que entre o ângulo das assimptotas θ_0 e o chamado ângulo de desvio ψ_0 se pode estabelecer a relação

$$\psi_0 = \pi - 2\,\theta_0 \qquad (15)$$

ou seja

$$\frac{\psi_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta \qquad (16)$$

pode escrever-se

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \frac{k}{v^2_0\,b} \qquad (17)$$

Com base nesta expressão é possível determinar, como é sabido, (ver por exemplo o livro «Introduction to Atomic Physics», de ENGE, WEHR, RICHARDS, Addison-Wesley, p. 93) qual deve ser a fracção do número de partículas α de um feixe desviadas de um dado ângulo ψ_0. É este resultado que pode ser verificado experimentalmente de modo a confirmar a hipótese de Rutherford da existência de um núcleo (experiências de Geiger e Marsden).

2. *Apresentação de um possível paradoxo*

A discussão do problema segundo as linhas acima indicadas é susceptível de alguns reparos até pela condensação que é necessária. Uma dúvida surgida numa das aulas conduziu a uma discussão do problema que me parece suficientemente interessante para merecer divulgação. Por uma questão pedagógica conservei a forma pela qual o problema foi resolvido (não esquecer que se tratava de um curso destinado a alunos do 1.º ano e portanto sem grande preparação de matemática ou Física).

Consideremos de novo a figura 1. Tal como foi referido anteriormente, os triângulos [VAO] e [BFO] são iguais, sendo

$$VA = BF = b$$
$$AO = OF = d$$
$$VO = OB = a \qquad (18)$$

Admitamos que se fez tender para zero o ângulo θ_0 das assimptotas, mantendo constante a posição do centro da hipérbole, O, e a posição do foco, F. De acordo com este processo de diminuir o parâmetro de choque b, a distância d manteve-se constante. Então o ponto v vai-se afastando progressivamente de O. No limite, quando b se anular, a distância entre o foco F e o vértice da hipérbole V será a maior possível e dada por

$$r_{min} = 2\,d \qquad (19)$$

o que aliás está de acordo com (8). Contudo, tal como referido anteriormente, o caso em que o parâmetro de choque é nulo deve corresponder à menor distância a que a partícula incidente se pode aproximar da partícula em repouso. Isto é, o valor r_0 definido em (4) é o menor dos valores possíveis de r_{min} o que aliás está de acordo com (7).

Surge assim, ao que parece, um paradoxo que merece ser discutido com um certo pormenor. Para isso começamos por analisar o caso geral da interacção de duas partículas carregadas electricamente.

3. *O caso genérico da difusão de Rutherford*

Consideremos uma partícula de massa m, velocidade inicial v_0 e carga *Z'e* positiva que se aproxima de uma outra partícula, suposta em repouso, e com carga eléctrica positiva *Ze*. Admitamos que a partícula em repouso está colocada na origem de um sistema de coordenadas polares. Neste sistema de coordenadas as expressões de aceleração radial e tangencial são, respectivamente

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (20)$$

$$a_t = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad (21)$$

Trata-se de um movimento central (a direcção da força passa por um ponto fixo, origem do sistema de coordenadas) ou, mais concretamente, uma vez que a interacção entre as partículas é regida pela lei de Coulomb, as componentes tangencial e radial da força são

$$F_t = 0 \qquad (22)$$

$$F_r = \frac{ZZ'e^2}{r^2} = km\frac{1}{r^2} \qquad (23)$$

com k dado por (3).

Aplicando a 2.ª lei de Newton

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad (24)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r^2} \qquad (25)$$

De (24) vem

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad (26)$$

sendo h a constante de integração. Então

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \qquad (27)$$

donde, por substituição em (25)

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{k}{r^2} \qquad (28)$$

Mas

$$\frac{d\frac{dr}{dt}}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \ddot{r} \qquad (29)$$

ou seja, atendendo a (28)

$$\dot{r}\frac{dr}{dr} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{k}{r^2} \qquad (30)$$

Por outro lado, o quadrado do módulo da velocidade é dado por

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \qquad (31)$$

Como neste caso se tem (27),

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \qquad (32)$$

Integrando (30)

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{k}{r} + C \qquad (33)$$

em que C é a constante de integração. Então

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = -\frac{2k}{r} + 2C \qquad (34)$$

Comparando com (32)

$$v^2 = -\frac{2k}{r} + 2C \qquad (35)$$

Além disso

$$\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \qquad (36)$$

ou seja

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} \qquad (37)$$

Atendendo agora a (27 e (34) pode escrever-se

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{h^2}\left\{-\frac{h^2}{r^2} - \frac{2k}{r} + 2C\right\} \qquad (38)$$

Isto é, a equação diferencial da trajectória é

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left\{\frac{2C}{h^2}r^2 - \frac{2k}{h^2}r - 1\right\}r^2 \qquad (39)$$

É de salientar que até aqui a única restrição imposta é que o centro da forças se situe na origem do sistema de coordenadas ($r = 0$).

Consideremos agora a equação

$$b\ \mathrm{tg}\ \theta_0 = -r\left[\varepsilon\cos(\theta + \theta_0) + 1\right] \qquad (40)$$

que corresponde ao ramo da hipérbole mais afastado do foco que se toma para origem de um sistema de coordenadas polares sendo ε a excentricidade (cfr. apêndice, equação A 27). Diferenciando obtém-se

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r\,\mathrm{sen}\,(\theta + \theta_0)}{\varepsilon\cos(\theta + \theta_0) + 1} \qquad (41)$$

Por outro lado, utilizando (40) é possível verificar que

$$r^2 \left[\frac{(\varepsilon^2 - 1)}{b^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0} r^2 - \frac{2}{b \operatorname{tg} \theta_0} r - 1 \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon^2 r^2 \operatorname{sen}^2 (\theta + \theta_0)}{\left[\varepsilon \cos (\theta + \theta_0) + 1 \right]} \qquad (42)$$

o que permite escrever

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \left\{ \frac{(\varepsilon^2 - 1)}{b^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0} r^2 - \frac{2}{b \operatorname{tg} \theta_0} r - 1 \right\} r^2 \qquad (43)$$

Comparando (39) e (43) vem

$$\frac{2\,C}{h^2} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{b^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0} \qquad (44)$$

$$\frac{k}{h^2} = \frac{1}{b \operatorname{tg} \theta_0} \qquad (45)$$

Nessas condições vê-se que

$$b \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{n^2}{k} \qquad (46)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,Ch^2}{k^2}} \qquad (47)$$

Assim sendo vê-se que a trajectória descrita pela partícula incidente sob a acção do campo de forças gerado pela partícula considerada em repouso situada na origem do sistema de coordenadas é o ramo de hipérbole mais afastado do foco que é a origem do sistema de coordenadas. A excentricidade dessa hipérbole é dada pela equação (47) e o ângulo da assimptota obedece à equação (46). Por substituição em (40) obtém-se, para a equação da trajectória

$$\frac{h^2}{k} = -r \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\,Ch^2}{k^2}} \cos (\theta + \theta_0) + 1 \right\} \qquad (48)$$

Interessa agora determinar o valor das constantes de integração h e C.

4. *Determinação das constantes de integração. Discussão*

Para determinar as constantes de integração vejamos qual o seu significado físico. Atendendo a (26) pode escrever-se

$$m\,h = m\,r^2\,\dot{\theta} \qquad (49)$$

Ora o 2.º membro representa o momento angular em relação ao foco F. Vê-se assim que o momento angular é uma constante do movimento. Para determinar o valor de h pode considerar-se a situação da partícula incidente quando infinitamente afastada do foco F. Nessa altura o momento angular em relação a F é $m\,v_0 b$.

Pode então escrever-se

$$m\,v_0\,b = m\,h \qquad (50)$$

ou seja

$$h = v_0 b \qquad (51)$$

Atendendo agora à equação (35) pode escrever-se

$$\frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{mk}{r} = m\,C \qquad (52)$$

Substituindo o valor de k dado por (3) vem

$$\frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{ZZ'e^2}{r} = m\,C \qquad (53)$$

Ora o 1.º membro representa a soma da energia cinética e da energia potencial. Nestas condições a equação (53) exprime o princípio da conservação da energia (a energia total mantém-se constante). Quando a partícula incidente se encontra infinitamente afastada de F só possui energia cinética. Pode assim escrever-se

$$\frac{1}{2} m\,v_0^2 = m\,C \qquad (54)$$

ou seja

$$C = \frac{1}{2} v_0^2 \qquad (55)$$

Substituindo os valores das constantes na equação da trajectória obtém-se

$$\frac{v_0\,b^2}{k} = -r \left\{ \sqrt{1 + \frac{v_0^4\,b^2}{k^2}} \cos (\theta + \theta_0) + 1 \right\} \qquad (56)$$

O valor mínimo de r é obtido para

$$\theta = \pi - \theta_0 \qquad (57)$$

ou seja

$$\cos (\theta + \theta_0) = -1 \qquad (58)$$

Nesse caso

$$r_{min} = \frac{v_0^2\,b^2}{\sqrt{k^2 + v_0^2 b^2} - k} \qquad (59)$$

Para b = 0 obtém-se uma indeterminação que se pode levantar facilmente

$$r_0 = \lim_{b \to 0} r_{min} = \lim_{b \to 0} \frac{2\, b\, v_0^2}{\frac{1}{2} \frac{2\, b\, v_0^4}{\sqrt{k^2 + v_0^4 b^2}}} = \frac{2k}{v_0^2} \tag{60}$$

que é precisamente o valor encontrado em (4).

Por outro lado, qualquer que seja a hipérbole

$$r_{min} = a + d = d\,(1 + \cos\theta) = b\, \frac{1 + \cos\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0} =$$

$$= b \cot \frac{\theta_0}{2} \tag{61}$$

Então

$$\cot \frac{\theta_0}{2} = \frac{v_0^2\, b}{\sqrt{k^2 + v_0^4\, b^2} - k} \tag{62}$$

No limite, quando $b = 0$

$$\lim_{b \to 0} \cot \frac{\theta_0}{2} = \lim_{b \to 0} \frac{1}{b} \frac{k}{v_0^2} \tag{63}$$

ou seja

$$\theta_0 = 0 \tag{64}$$

Os resultados até agora encontrados confirmam os raciocínios apresentados no início deste trabalho. O valor mínimo de r corresponde à posição do vértice da hipérbole. Quando o parâmetro de choque é nulo (a velocidade inicial tem uma direcção que passa pelo ponto F) a distância mínima a que a partícula incidente se pode aproximar é dada por (60) e a trajectória é uma recta (caso limite da hipérbole) cujas assimptotas coincidem entre si e coincidem com o eixo principal que passa pelo foco.

Posta a questão nestes termos parece no entanto que persiste o paradoxo atrás apresentado. Contudo repare-se que de (59) se pode escrever

$$\frac{v_0^2\, b^2}{r_{min}} + k = \sqrt{k^2 + v_0^2 b^2} \tag{65}$$

Quadrando e atendendo a que, de (60) se tem

$$2\,k = r_0\, v_0 \tag{66}$$

é fácil obter

$$\frac{r_0}{r_{min}} = 1 - \frac{b^2}{r_{min}^2} \tag{67}$$

Recorrendo agora a (61) vem

$$\frac{r_0}{r_{min}} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2} \tag{68}$$

Uma vez que

$$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \tag{69}$$

vem, finalmente,

$$1 > \frac{r_0}{r_{min}} > 0 \tag{70}$$

ou seja

$$r_0 \leqslant r_{min} \tag{71}$$

devendo observar-se o sinal de igual quando $b = 0$, como seria de esperar.

Esta conclusão contraria assim o paradoxo apresentado. Repare-se no entanto que

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{b}{\sqrt{d^2 - b^2}} \tag{72}$$

Por outro lado, de (62) vem

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} = \frac{\sqrt{k^2 + v_0^4\, b^2} - k}{v_0^2\, b} \tag{73}$$

Assim sendo, uma vez que

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2}} \tag{74}$$

é fácil obter

$$\frac{b}{\sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{v_0^2\, b}{k} \tag{75}$$

Quadrando tem-se, finalmente,

$$d^2 = b^2 + \frac{k^2}{v_0^4} \tag{76}$$

Esta relação mostra que uma vez que sejam dadas determinadas condições do problema (isto é, uma vez que sejam dados valores de k e v_0), d e b não são independentes. Vista a questão de outro modo, se se mantém d constante e se se faz variar b fazendo-o tender para zero, então k^2/v_0^4 deve aumentar. Admitindo que k se conserva constante isso significa que v_0 deve diminuir, e por consequência o valor de r_0 dado por (60) aumentará. No limite ($b = 0$) será

$$v_0^2 = \frac{k}{d} \tag{77}$$

e então

$$r_0 = 2\,d$$

de acordo com (19). Mas este resultado corresponde a condições físicas diferentes para o problema.

O vício do raciocínio apresenta-se agora evidente. É errado fazer tender para zero o parâmetro de choque conservando constante a distância d. Isso só será possível fazendo variar a velocidade inicial v_0. Para dadas condições físicas do problema (v_0 e k constantes) deve considerar-se um feixe paralelo de partículas incidentes (o que equivale a considerar constante a direcção de v_0) variando deste modo o parâmetro de choque. As várias trajectórias constituirão uma família de hipérboles obedecendo a equações do tipo (56) em que a distância do vértice ao foco F é dada por (59) sendo a menor dessas distâncias o valor r dado por (60).

5. *Aplicação numérica*

Como aplicação consideremos o caso de um feixe de partículas α interactuando com um núcleo de átomo de ouro. Admitamos que as partículas têm a energia cinética inicial de 2,5 Mev. Para este caso, aproximadamente

$$m = 6{,}4 \times 10^{-24}\ \text{g}$$

$$T = 4 \times 10^{-6}\ \text{erg}$$

$$e = 4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{u.e.}$$

$$Z = 2$$

$$Z' = 79$$

Tem-se ainda

$$v_0^2 = 1{,}25 \times 10^{18}\ \text{cm}^2\ \text{seg}^{-2}$$

$$v_0 = 1{,}12 \times 10^{9}\ \text{cm seg}^{-1}$$

e, de (3)

$$k = 5{,}7 \times 10^{6}$$

Portanto

$$\frac{v_0^2}{k} = 2{,}2 \times 10^{11}$$

$$\frac{v_0^4}{k^2} = 4{,}8 \times 10^{22}$$

Substituindo na equação da hipérbole (56) obtém-se a equação genérica das trajectórias

$$2{,}2 \times 10^{11}\, b^2 = -\,r \left[\sqrt{1 + 4{,}8 \times 10^{22}\, b^2} + \cos(\theta + \theta_0) + 1 \right]$$

Para simplificar façamos

$$b = \beta \times 10^{-11}$$

$$r = \rho \times 10^{-14}$$

e assim

$$2{,}2\,\beta^2 = -\,\rho_0 \left[\sqrt{1 + 4{,}8\,\beta^2} \cos(\theta + \theta_0) + 1 \right]$$

O valor mínimo de ρ pode calcular-se a partir de (59) escrito sob a forma

$$r_{min} = \frac{\dfrac{v_0^2}{k}\, b^2}{\sqrt{1 + \dfrac{v_0^4}{k^2}\, b^2} - 1}$$

Substituindo valores vem

$$\rho_{min} = \frac{2{,}2\,\beta^2}{\sqrt{1 + 4{,}8\,\beta^2} - 1}$$

O ângulo θ_0 da assimptota com o eixo principal da hipérbole pode calcular-se a partir de (62) escrito sob a forma

$$\cot\frac{\theta_0}{2} = \frac{\dfrac{v_0^4}{k}\, b}{\sqrt{1 + \dfrac{v_0^2}{k^2}\, b^2} - 1}$$

Substituindo valores tem-se

$$\cot\frac{\theta_0}{2} = \frac{2{,}2\,\beta}{\sqrt{1 + 4{,}8\,\beta^2} - 1}$$

Por outro lado, de (76) vem

$$d = \frac{k}{v_0^2} \sqrt{1 + \frac{v_e^4}{k^2}\, b^2}$$

Substituindo valores e fazendo

$$d = \delta \times 10^{-11}$$

vem

$$\delta = \frac{\sqrt{1 + 4{,}8\,\beta^2}}{2{,}2}$$

Estas relações permitem calcular os valores das grandezas para vários valores de β. Para $\beta = 0$ é necessário recorrer às expressões deduzidas para esse caso. Assim, de (60) e (64) e substituindo valores

$$\rho_0 = 0{,}909$$

$$(\Theta_0)_0 = 0$$

Além disso

$$\delta_0 = 0{,}4545$$

Pode assim organizar-se um quadro de valores de δ, Θ_0, e ρ_{min} para vários valores do parâmerto β (Quadro I). Por substituição dos valores de β e Θ_0 é fácil então obter as equações das trajectórias. Assim

$$\beta = 0{,}1 \qquad \rho = -\frac{0{,}022}{1{,}0237 \cos(\Theta + 12{,}30) + 1}$$

$$\beta = 0{,}2 \qquad \rho = -\frac{0{,}088}{1{,}09 \cos(\Theta + 23{,}12) + 1}$$

$$\beta = 0{,}3 \qquad \rho = -\frac{0{,}198}{1{,}19 \cos(\Theta + 32{,}12) + 1}$$

$$\beta = 0{,}4 \qquad \rho = -\frac{0{,}352}{1{,}33 \cos(\Theta + 41{,}11) + 1}$$

$$\beta = 0{,}5 \qquad \rho = -\frac{0{,}55}{1{,}48 \cos(\Theta + 47{,}14) + 1}$$

$$\beta = 0{,}6 \qquad \rho = -\frac{0{,}792}{1{,}65 \cos(\Theta + 52{,}43) + 1}$$

$$\beta = 0{,}7 \qquad \rho = -\frac{1{,}078}{1{,}83 \cos(\Theta + 56{,}66) + 1}$$

$$\beta = 0{,}8 \qquad \rho = -\frac{1{,}408}{2{,}02 \cos(\Theta + 60{,}08) + 1}$$

QUADRO I

β	$\sqrt{1 + 4{,}8\,\beta^2} = \alpha$	$\delta = \frac{\alpha}{2{,}2}$	$\cot\frac{\Theta_0}{2} = \frac{2{,}2\,\beta}{\alpha - 1}$	Θ_0	$d_{min} = \frac{2{,}2\,\beta^2}{\alpha - 1}$
0	1,00	0,4545	∞	0	0,909
0,1	1,02	0,4653	9,283	12,30	0,928
0,2	1,09	0,4955	4,889	23,12	0,980
0,3	1,19	0,5401	3,474	32,12	1,042
0,4	1,33	0,6045	2,667	41,11	1,067
0,5	1,48	0,6727	2,292	47,14	1,146
0,6	1,65	0,7500	2,031	52,43	1,218
0,7	1,83	0,8318	1,855	56,66	1,299
0,8	2,02	0,9172	1,729	60,08	1,383
0,9	2,21	1,005	1,635	62,87	1,472
1,0	2,41	1,095	1,561	65,29	1,561
1,2	2,81	1,279	1,459	68,87	1,750
1,4	3,226	1,466	1,384	71,71	1,937
1,6	3,505	1,593	1,219	78,25	1,967

QUADRO II

$\beta = 0{,}1$	θ_1	164	162	160	159	158	156
$\pi - \theta_o = 167{,}70$	θ_2	171,40	173,40	175,40	176,40	177,40	179,40
$\rho_{min} = 0{,}928$	ρ	1,020	1,180	1,520	1,845	2,427	9,052
$\beta = 0{,}2$	θ_1	155	150	145	140	135	
$\pi - \theta_o = 156{,}88$	θ_2	158,76	163,76	168,76	173,76	178,76	
$\rho_{min} = 0{,}980$	ρ	0,984	1,071	1,320	2,045	7,663	
$\beta = 0{,}3$	θ_1	140	135	130	125	120	
$\pi - \theta_o = 147{,}88$	θ_2	155,76	160,76	165,76	170,76	175,76	
$\rho_{min} = 1{,}042$	ρ	1,108	1,237	1,494	2,055	3,817	
$\beta = 0{,}4$	θ_1	130	120	115	110	100	
$\pi - \theta_o = 138{,}89$	θ_2	147,78	157,78	162,78	167,78	177,78	
$\rho_{min} = 1{,}067$	ρ	1,121	1,362	1,629	2,140	9,997	
$\beta = 0{,}5$	θ_1	130	120	110	100	90	
$\pi - \theta_o = 132{,}86$	θ_2	135,72	145,72	155,72	165,72	175,82	
$\rho_{min} = 1{,}146$	ρ	1,150	1,242	1,512	2,262	6,481	
$\beta = 0{,}6$	θ_1	120	110	100	90	80	
$\pi - \theta_o = 127{,}57$	θ_2	135,14	145,14	155,14	165,14	175,14	
$\rho_{min} = 1{,}218$	ρ	1,246	1,382	1,712	2,573	6,994	
$\beta = 0{,}7$	θ_1	120	110	100	90	80	
$\pi - \theta_o = 123{,}34$	θ_2	127,28	137,28	147,28	157,28	167,28	
$\rho_{min} = 1{,}299$	ρ	1,304	1,381	1,585	2,038	3,297	
$\beta = 0{,}8$	θ_1	110	100	90	80	70	
$\pi - \theta_o = 119{,}92$	θ_2	129,84	139,84	149,84	159,84	169,84	
$\rho_{min} = 1{,}383$	ρ	1,423	1,566	1,875	2,564	4,684	
$\beta = 0{,}9$	θ_1	110	100	90	80	70	
$\pi - \theta_o = 117{,}13$	θ_2	124,26	134,26	144,26	154,26	164,26	
$\rho_{min} = 1{,}473$	ρ	1,494	1,603	1,843	2,339	3,539	
$\beta = 1{,}0$	θ_1	110	100	90	80	70	
$\pi - \theta_o = 114{,}71$	θ_2	119,42	129,42	139,42	149,42	159,42	
$\rho_{min} = 1{,}561$	ρ	1,569	1,653	1,850	2,242	3,087	
$\beta = 1{,}2$	θ_1	110	100	90	80	70	60
$\pi - \theta_o = 111{,}13$	θ_2	112,26	122,26	132,26	142,26	152,26	162,26
$\rho_{min} = 1{,}750$	ρ	1,751	1,803	1,954	2,254	2,837	4,150
$\beta = 1{,}5$	θ_1	100	90	80	70	60	55
$\pi - \theta_o = 108{,}29$	θ_2	116,58	126,58	136,58	146,58	156,58	161,58
$\rho_{min} = 1{,}937$	ρ	1,967	2,090	2,343	2,815	3,761	4,645
$\beta = 1{,}6$	θ_1	100	90	80	70	60	50
$\pi - \theta_o = 101{,}75$	θ_2	103,50	113,50	123,50	133,50	143,50	153,50
$\rho_{min} = 1{,}967$	ρ	2,250	2,316	2,497	2,844	3,487	4,814

$$\beta = 0{,}9 \qquad \rho = -\frac{1{,}782}{2{,}21 \cos(\theta + 62{,}87) + 1}$$

$$\beta = 1{,}0 \qquad \rho = -\frac{2{,}2}{2{,}41 \cos(\theta + 65{,}29) + 1}$$

$$\beta = 1{,}2 \qquad \rho = -\frac{3{,}168}{2{,}81 \cos(\theta + 68{,}87) + 1}$$

$$\beta = 1{,}4 \qquad \rho = -\frac{4{,}312}{3{,}226 \cos(\theta + 71{,}71) + 1}$$

$$\beta = 1{,}6 \qquad \rho = -\frac{5{,}632}{3{,}505 \cos(\theta + 78{,}25) + 1}$$

Atribuindo vários valores a θ podem obter-se os valores de correspondentes. Apresenta-se no Quadro II um conjunto de valores, que permitem traçar as trajectórias. É de salientar que atendendo às propriedades da hipérbole há normalmente dois valores de θ que conduzem ao mesmo valor de ρ. Sendo θ_1 e θ_2 esses valores entre eles pode estabelecer-se a relação

$$2\pi - (\theta_2 + \theta_0) = \theta_1 + \theta_0$$

ou seja

$$\theta_2 = 2\pi - 2\theta_0 - \theta_1$$

No quadro II, para cada valor de β indicam-se os valores de $\pi - \theta_0$, ρ_{min}, e os valores θ_1 e θ_2 conduzindo a um mesmo valor de ρ.

Na figura 3 estão traçadas algumas das hipérboles. Para não sobrecarregar o desenho indicam-se apenas as que correspondem aos valores de β de 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4.

Apêndice

Consideremos a equação de uma hipérbole referida aos eixos principais (figura 2)

$$\frac{x^2}{k_1^2} - \frac{y^2}{k_2^2} = 1 \qquad \text{(A 1)}$$

A equação das assimptotas é

$$y = \pm \frac{k_2}{k_1} x \qquad \text{(A 2)}$$

Como para

$$y = 0$$

é

$$x = \pm a$$

e a equação das assimptotas é

$$y = \pm (\operatorname{tg} \theta_0)\, x = \pm \frac{b}{a} x \qquad \text{(A 3)}$$

vem

$$k_1 = a$$
$$k_2 = b \qquad \text{(A 4)}$$

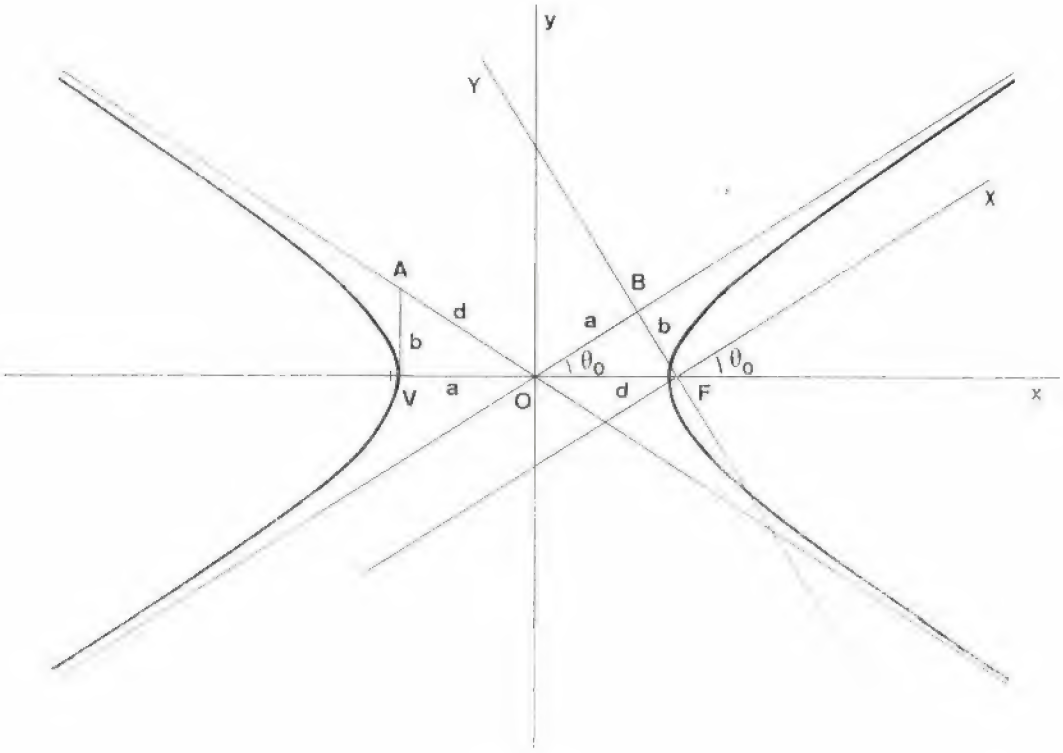


Figura 2

A equação da hipérbole é, assim

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(A 5)}$$

ou

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 - y^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 \qquad \text{(A 6)}$$

Consideremos agora o sistema de eixos XY indicado na figura. Em primeiro lugar desloquemos o sistema de eixos (Oxy) paralelamente até o ponto O coincidir com F. As coordenadas de F no sistema (Oxy) são

$$F = (d, 0) \qquad \text{(A 7)}$$

Portanto no novo sistema de eixos (Fx'y')

$$x' = x - d$$

$$y' = y \qquad \text{(A 8)}$$

ou seja

$$x = x' + d$$

$$y = y' \qquad \text{(A 9)}$$

Consideremos agora a rotação dos eixos (Fx'y') até (FXY)

$$x' = X \cos \theta_0 - Y \operatorname{sen} \theta_0$$

$$y' = Y \cos \theta_0 + X \operatorname{sen} \theta_0 \qquad \text{(A 10)}$$

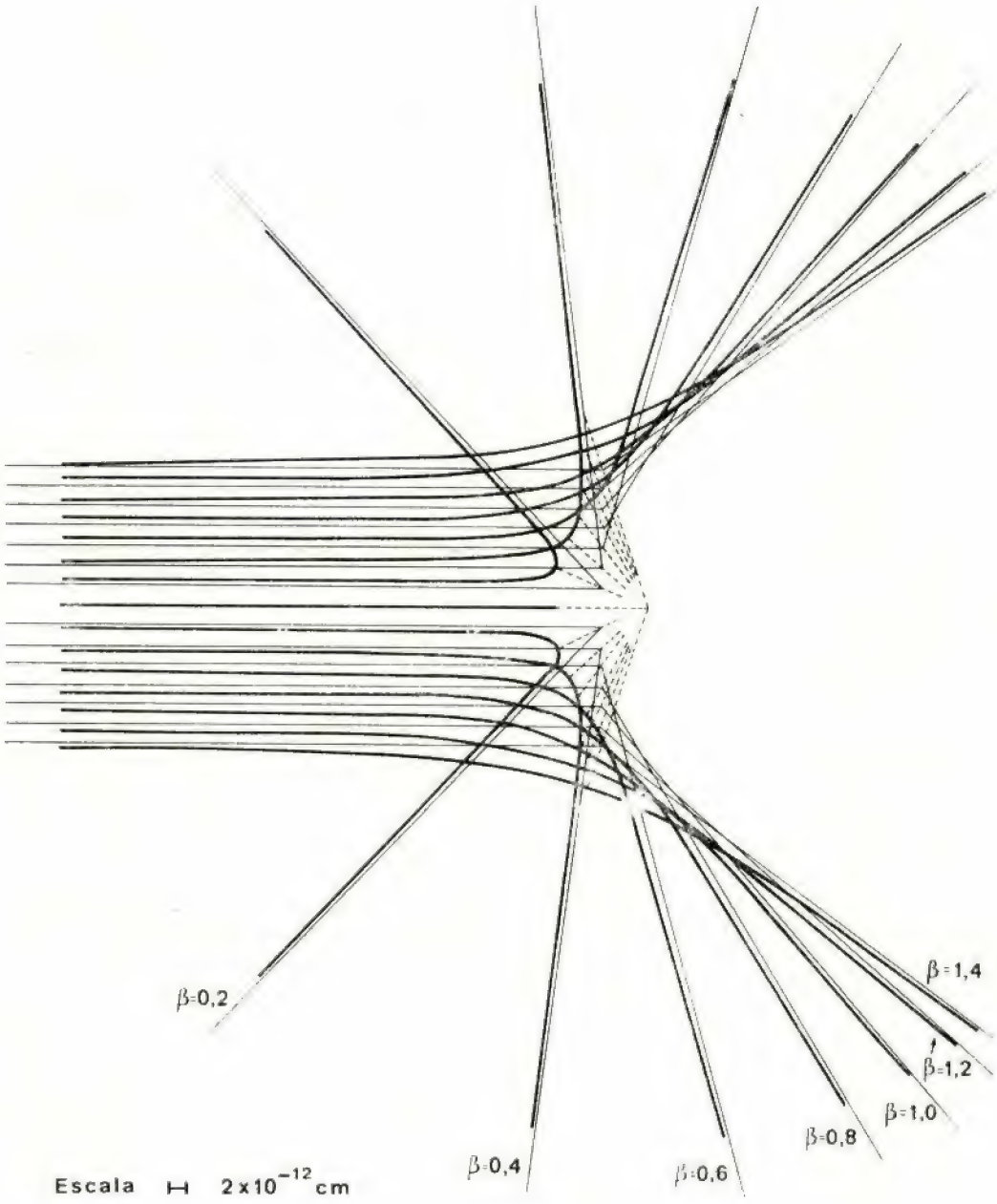


Figura 3

Portanto

$$x = X \cos \theta_0 - Y \operatorname{sen} \theta_0 + d$$

$$y = Y \cos \theta_0 + X \operatorname{sen} \theta_0 \qquad \text{(A 11)}$$

Definamos um sistema de coordenadas polares cujo foco é F e em que

$$X = r \cos \theta$$

$$Y = r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{(A 12)}$$

Obtém-se facilmente

$$x^2 = \left[r \cos (\theta + \theta_0) + d \right] \qquad \text{(A 13)}$$

$$y^2 = \left[r \operatorname{sen} (\theta + \theta_0) \right]^2$$

Substituindo na equação (A 6)

$$\left[r \cos (\theta + \theta_0) + d \right]^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 - r^2 \operatorname{sen}^2 (\theta + \theta_0) = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 \qquad \text{(A 14)}$$

Ora

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a}{b} \qquad \text{(A 15)}$$

$$\operatorname{sen} \theta_0 = \frac{b}{d} \qquad \text{(A 16)}$$

$$\cos \theta_0 = \frac{a}{d} \qquad \text{(A 17)}$$

Então

$$\cos (\theta + \theta_0) = \frac{1}{d} (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta) \qquad \text{(A 18)}$$

$$\cos^2 (\theta + \theta_0) = \frac{1}{d^2} (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)^2 \qquad \text{(A 19)}$$

$$\operatorname{sen}^2 (\theta + \theta_0) = \frac{1}{d^2} (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)^2 \qquad \text{(A 20)}$$

Por substituição em (A 14) obtém-se

$$r^2 \left\{ \frac{b^2 (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)^2}{a^2 (a^2 + b^2)} - 1 + \frac{a^2 (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)^2}{a^2 (a^2 + b^2)} \right\} + r \frac{2b^2 (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)}{a^2} = b^2 - \frac{b^2 (a^2 + b^2)}{a^2}$$

ou seja

$$\left[(a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)^2 - a^2 \right] + r^2 + 2b^2 (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta) r + b^4 = 0 \qquad \text{(A 21)}$$

Resolvendo em ordem a r obtém-se

$$r = - b^2 \frac{(a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta) + a}{(a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta)^2 - a^2} \qquad \text{(A 22)}$$

Isto é, há duas soluções

$$r_- = - b^2 \frac{1}{a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta + a} \qquad \text{(A 23)}$$

$$r_+ = - b^2 \frac{1}{a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta - a} \qquad \text{(A 24)}$$

Atendendo a que a excentricidade da hipérbole é

$$\varepsilon = \frac{d}{a} \qquad \text{(A 25)}$$

e que

$$a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta = d \cos (\theta + \theta_0) \qquad \text{(A 26)}$$

e atendendo ainda a (A 15) é fácil obter as relações

$$b \operatorname{tg} \theta_0 = - r_- \left[\varepsilon \cos (\theta + \theta_0) + 1 \right] \qquad \text{(A 27)}$$

$$b \operatorname{tg} \theta_0 = - r_+ \left[\varepsilon \cos (\theta + \theta_0) - 1 \right] \qquad \text{(A 28)}$$

Para identificar qual dos ramos da hipérbole corresponde a r_- e r_+ basta fazer $\theta = \pi - \theta_0$. Obtém-se

$$r_- = d + a \qquad \text{(A 29)}$$

$$r_+ = d - a \qquad \text{(A 30)}$$

o que mostra que r_- corresponde ao ramo mais afastado do foco F e r_+ ao ramo mais próximo.

C. D. U. 69.002:658.012.1

Matriz dos Coeficientes Técnicos da Indústria da Construção(*)

S. POMPEU DOS SANTOS
Engenheiro civil
Estagiário para Especialista do Serviço de Edifícios (LNEC)

RESUMO

A análise de relações interindustriais, correntemente designada por análise «Input-output» visa o conhecimento das relações quantitativas existentes entre os vários sectores duma economia através do estabelecimento da respectiva Matriz de relações interindustriais ou quadro «input-output». No entanto o instrumento de análise com interesse prático é a Matriz dos coeficientes técnicos (modelo «input-output») que se obtém da primeira mediante a introdução de certas hipóteses. Quando se pretende um conhecimento mais preciso das relações interindustriais dum Sector económico faz-se a sua desagregação em subsectores e elabora-se a respectiva Matriz de coeficientes técnicos sectorial.

Neste trabalho faz-se a determinação da Matriz dos coeficientes técnicos em unidades físicas do Sector da indústria da Construção para o ano de 1970, desagregando (em Sectores) tanto o produto do Sector — obras — como os consumos — materiais. Foram considerados 13 Sectores de Obras e 36 Sectores de Materiais de Construção. No capítulo 1 apresentam-se algumas considerações sobre análise interindustrial bem como a metodologia de elaboração da Matriz. No capítulo 2 apresenta-se a nomenclatura de Sectores considerada com a definição pormenorizada do conteúdo de cada Sector e a especificação das respectivas unidades de produção. No capítulo 3 refere-se o sistema de recolha da informação; o modo de obtenção de projectos e a descrição da operação «análise de projectos». No capítulo 4 apresenta-se o método de cálculo dos coeficientes técnicos para cada Sector de obras bem como algumas considerações sobre os coeficientes técnicos calculados.

SUMMARY

The object of «input-output» analysis is to know the inter-relationships that exist, between the various parts of a national economy through the establishment of the respective «input-output» table. Nevertheless, the analysis instrument with pratical interest is the Technical coefficients Matrix, the so called «input-output» model, which is obtained from the first one assuming certain hypotheses. When one wishes to obtain a more perfect knowledge of the inter-relationships of a economic sector one does the desaggregation in subsectors and elaborates the respective Sectorial Matrix of the technical coefficients.

This paper describes the method of obtaining the Technical coefficients Matrix in physical units of Construction industry Sector in 1970, desaggregating the product of Sector — works —, and the consomattions — materials. 13 «Works sectors» and 36 «Construction materials sectors» where considered. Chapter 1 presents some considerations about «input-output» analysis, as well as the methodology for the elaboration of the Matrix. Chapter 2 presents the nomenclature considered for the Sectors, with the complete definition of the content of each Sector and the specification of the respective production units. Chapter 3 presents the information retrieval systhem; the way of abstaining the projects and the description of the operation «project analysis». Chapter 4 presents the calculation method of technical coefficients on each «Works sector», as well as some considerations about the technical coefficients calculated.

(*) O trabalho «Matriz dos Coeficientes Técnicos da Indústria da Construção» é um resumo adaptado do relatório «Matriz de Relações Interindustriais na Construção» elaborado no LNEC e publicado em Novembro de 1975. Este estudo, desenvolvido na Divisão e Produtividade do Serviço de edifícios, foi iniciado em 1972 pelo engenheiro A. Fonseca Ferreira, e com a assistência consultiva do dr. J. Silva Ferreira e de M. Jean Maisot (do Bureau d'Informations et de Prèvisions Economiques — França). A partir de meados de 1973 o prosseguimento e conclusão do estudo ficou a cargo do eng.º S. Pompeu dos Santos, com a assistência do Chefe do Serviço investigador eng.º Ruy José Gomes.

1 — ANÁLISE INTERINDUSTRIAL NA CONSTRUÇÃO

1.1 — *Modelo «Input-Output»*

A análise de relações interindustriais, também designada análise «input-output», visa o conhecimento das relações quantitativas existentes entre os diversos sectores duma economia de modo a permitir o seu exame para se poder assegurar um fluxo produtivo sem perturbações. Esta análise é normalmente realizada através duma Matriz de relações interindustriais, ou modelo «Input-Output».

Apesar de se tratar duma técnica de planeamento recente os seus fundamentos remontam já ao sec. XVIII, quando F. Quesnay formula um «Quadro económico» em que pretende mostrar a interdependência geral dos diferentes sectores duma economia. Também Walras, no final do século passado, chama a atenção para a interdependência dos sectores económicos que tenta traduzir mediante um sistema de equações. Apesar de apreciáveis exposições teóricas os trabalhos de Quesnay e Walras não apresentaram grande interesse prático dada a inadequação das técnicas de cálculo então existentes e a escassa informação estatística disponível, e é W. Leontief, já no séc. XX, que elabora o primeiro modelo «Input-Output», aplicado á economia dos E.U.A. O modelo de Leontief constitui portanto a Matriz de relações interindustriais duma economia, isto é, um quadro de dupla entrada, onde se descrevem nas linhas as utilizações da produção de cada sector e nas colunas os consumos necessários (provenientes de outros sectores) para que a produção do sector a que a coluna diz respeito possa ter lugar.

No entanto este modelo tem apenas um valor descritivo; o instrumento de análise com interesse prático é a Matriz dos coeficientes técnicos que se obtém da Matriz global mediante a introdução de certas hipóteses relativas ao mecanismo da produção. Os coeficientes técnicos poderão ser expressos em termos físicos ou em valor conforme as unidades em que é expressa a informação. Apesar de vulgarmente esta ser expressa em valor os coeficientes técnicos físicos apresentam vantagens importantes dada a sua maior estabilidade já que não se faz intervir a noção de preço.

As Matrizes de relações interindustriais obtidas deste modo apresentam, no entanto, algumas deficiências importantes já que consideram que a produção de cada sector económico é toda realizada pelo mesmo processo tecnológico. Para melhorar o tratamento da tecnologia a via que tem sido seguida consiste na desagregação dos sectores económicos, procurando reduzi-los a produtos para os quais tenha significado a consideração duma tecnologia média, e elaborando a respectiva Matriz de relações interindustriais sectorial. Os resultados obtidos das várias análises sectoriais são então introduzidos na Matriz global.

A Construção é, no entanto, um Sector económico com características singulares já que mesmo que o grau de desagregação do sistema produtivo em sectores não seja muito elevado, não apresenta ligações de interdependência fortes com outros sectores económicos pois funciona em circuito fechado de consumidora de materiais de construção e fornecedora dum produto final (obras) pelo que as alterações noutros sectores económicos não afectam directamente esta indústria sendo o seu volume de produção determinado fundamentalmente por um crescimento económico global e pela política de investimentos.

Tal como a Matriz global a Matriz da Construção pode ser expressa em unidades monetárias ou em unidades físicas apresentando estas as vantagens de estabilidade já atrás referidas para a Matriz global. Também nesta análise interindustrial sectorial o instrumento de trabalho com interesse prático é a respectiva Matriz de coeficientes técnicos, aqui designados coeficientes técnicos materiais/obras, que relacionam as quantidades dos materiais consumidos nas obras e as unidades de produção dessas obras.

1.2 — *Metodologia de elaboração da Matriz dos coeficientes técnicos físicos do Sector da Construção em 1970.*

Em análise interindustrial, como em qualquer estudo de índole estatística, a principal dificuldade reside, normalmente, na obtenção da informação básica, já que se torna indispensável a compilação dum volumoso conjunto de dados que permita tirar conclusões.

Na elaboração da Matriz dos coeficientes técnicos do Sector da Construção para o ano de 1970, a via que se julgou utilizável, embora obrigando a um moroso trabalho de recolha de informação, foi a obtenção dos dados necessários a partir da análise dos projectos de obras construídas no país à volta do ano de 1970 (período 1967-1973).

Sintetizando, o estudo desenvolveu-se segundo o organigrama a seguir apresentado:

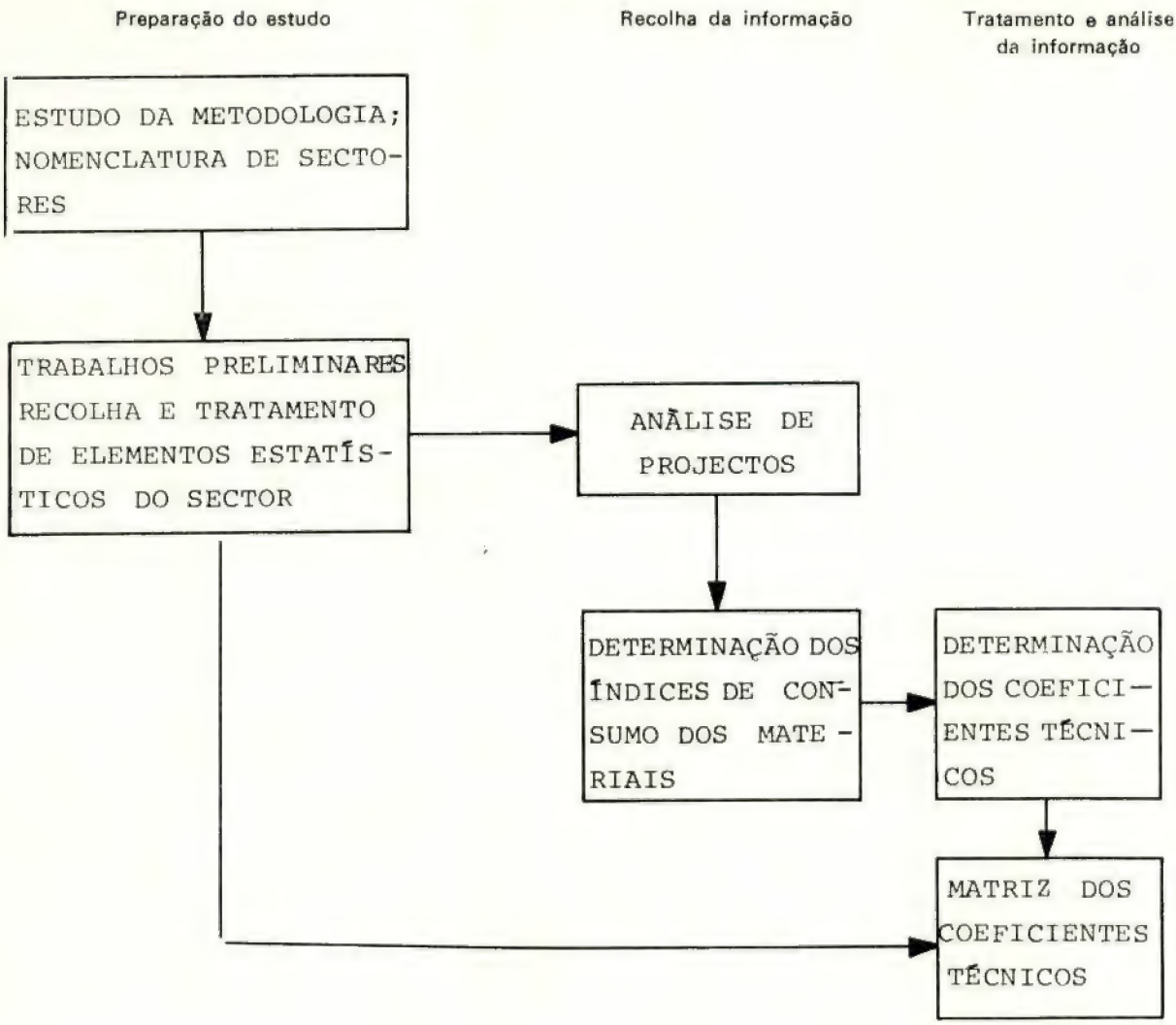
Neste organigrama há a distinguir três fases distintas:

a) *preparação do estudo* — engloba os trabalhos preliminares de recolha de informação estatística relativa à indústria da Construção, o estudo da nomenclatura de Sectores, tanto de Obras como Materiais, e o estudo da metodologia para obtenção dos dados necessários.

b) *recolha da informação* — definida a metodologia — análise de projectos de obras dos vários sectores —, seleccionam-se os projectos a analisar, procede-se à sua angariação junto dos donos de obras, projectistas e empresas construtoras e procede-se finalmente à sua análise, com vista à determinação dos índices de consumo dos materiais em cada obra.

c) *tratamento e análise da informação — a partir* dos índices de consumo dos materiais nas obras analisadas em cada sector calculam-se os coeficientes técnicos respectivos, referidos ao ano de 1970.

ORGANIGRAMA DOS TRABALHOS



2 — NOMENCLATURA DE SECTORES NA CONSTRUÇÃO

2.1 — *Sectores «Obras»*

Para conhecer as interdependências sectoriais resultantes da actividade da Construção é necessária a fixação duma sistemática exaustiva com a definição criteriosa do conteúdo dos vários sectores, tanto «Obras» como «Materiais», que intervêm no processo de produção desta indústria.

A nomenclatura de obras foi fixada partindo da própria noção de *obra*, considerando-se *obra* um produto com especificidade técnica e funcional bem definidas, distinguível mesmo quando esteja incluída num conjunto de intalações que inclua outro tipo de obras.

O conjunto das obras de construção foi assim dividido em 21 sectores distintos, tendo sido possível obter informação para elaboração da Matriz relativamente à série de 13 Sectores a seguir discriminados. Os 13 Sectores considerados representam, no entanto cerca de 85% do valor total das obras de construção, sendo, por outro lado, dos Sectores em que o valor dos materiais consumidos assume maior importância no valor total das obras pelo que, em termos de consumo dos materiais de construção, aquela percentagem é ainda mais elevada.

O/01 — EDIFÍCIOS PARA HABITAÇÃO SOCIAL (m^2 pav.)

Compreende os edifícios novos que visam o fornecimento de alojamentos em regime permanente, tanto imóveis colectivos como casas individuais, construídos pelo Estado, autarquias locais e organismos semipúblicos, nas seguintes modalidades (conforme a terminologia anteriormente tradicional):

— «Casas económicas»;

— «Casas construídas na cidade de Lisboa»;

— «Casas de renda económica em regime de locação»;

— «Casas de renda económica em regime de propriedade resolúvel»;

— Casas para famílias pobres»;

— Casas para desalojados das ilhas da cidade do Porto»;

— «Casas para pescadores»;

— Casas para funcionários públicos»;

— «Casas de renda limitada».

O/02 — EDIFÍCIOS PARA HABITAÇÃO DE RENDIMENTO (m^2 pav.)

Compreende os edifícios novos que visam o fornecimento de alojamentos em regime permanente, tanto imóveis colectivos como casas individuais, cujos promotores são entidades particulares; encontram-se nas seguintes modalidades:

— renda livre;

— ocupadas pelo próprio;

— ocupadas pelo próprio e outro(s).

O/03 — EDIFÍCIOS PARA ESCRITÓRIOS (m^2 pav.)

Compreende os edifícios novos construídos para servir actividades terciárias: edifícios para Administração Pública e edifícios de escritórios privados.

O/04 — EDIFÍCIOS INDUSTRIAIS (m^2 pav.)

São as construções novas, realizadas para a indústria, com exclusão dos locais administrativos ou comerciais; incluem-se casos diferentes de naves industriais e de edifícios de andares também usados pela indústria.

O/05 — EDIFÍCIOS HOTELEIROS (m^2 pav.)

São os edifícios novos construídos para a indústria Hoteleira que visam directamente o fornecimento de alojamentos em regime temporário. Incluem-se nomeadamente os hotéis, motéis, blocos de apartamentos, estalagens, pousadas, etc.

O/06 — EDIFÍCIOS ESCOLARES (m^2 pav.)

São os edifícios novos construídos com fins educacionais, tanto públicos como privados. Incluem-se assim as escolas primárias, os edifícios para o ensino preparatório, técnico e secundário, os edifícios universitários e os edifícios construídos por entidades particulares para formação profissional.

O/07 — EDIFÍCIOS HOSPITALARES (m^2 pav.)

São os edifícios novos construídos para equipamentos de saúde. Incluem-se indistintamente as obras construídas pelo Estado (hospitais, casas de saúde, dispensários) e pelo sector privado (hospitais, clínicas).

O/08 — ESTRADAS (m^2 pav.)

São os troços novos de estradas nacionais ou municipais caracterizadas pela existência duma única via de circulação; não incluem as beneficiações ou reparações em troços anteriormente contruídos. As obras de arte de certa importância que intercalam troços de estradas não fazem parte dos trabalhos nestas obras.

O/09 — AUTO-ESTRADAS (m^2 pav.)

São caracterizadas pela existência de duas vias de circulação independentes, com pelo menos duas faixas de rodagem cada e separador central. Incluem-se nestas obras todos os trabalhos necessários excepto os relativos a pontes e viadutos quando o seu valor for significativo no valor total das obras em que estão incluídos; neste caso são consideradas em separado, no sector de Pontes e Viadutos.

O/10 — PONTES E VIADUTOS (m^2 tabuleiro)

Incluem-se neste sector as pontes, viadutos e passagens desniveladas para peões que são objecto de empreitadas isoladas. Estas englobam, além dos seus trabalhos propriamente ditos, os relativos aos Acessos quando o valor destes não for significativo no valor global da empreitada.

O/11 — AEROPORTOS E AERÓDROMOS (m^2 pav.)

Incluem-se neste Sector os trabalhos de construção de pistas, placas de estacionamento e plataformas nos aeroportos e aeródromos, tanto civis como militares. Não se incluem as construções anexas.

O/12 — BARRAGENS (m^3 betão)

Inclui todas as obras fluviais cuja função é a retenção da água, desde os pequenos diques às barragens

propriamente ditas. Podem ser de betão, de enrocamento, de terra ou mistas.

O/13 — PORTOS E TRABALHOS MARITIMOS (m^3 betão)

Incluem-se neste sector todos os trabalhos marítimos de construção, nomeadamente cais acostáveis, docas, terminais petroleiros, molhes de protecção, etc.

As unidades de produção adoptadas foram, portanto, nos sectores de edifícios, o m^2 de área de pavimento, designando-se por área de pavimentos dum edifício a soma das áreas brutas de cada piso, incluindo caves, subcaves, águas furtadas ou outros espaços fechados habitáveis ou utilizáveis; em Estradas, Auto-estradas e Aeroportos e Aeródromos adoptou-se o m^2 de área de pavimento, isto é, a área reservada ao tráfego; em Pontes e Viadutos adoptou-se o m^2 de área de tabuleiro medida entre as faces dos encontros; em Barragens e Portos e Trabalhos Marítimos a unidade escolhida foi o m^3 de betão aplicado na obra.

2.2 — *Sectores «Materiais»*

Na elaboração da sistemática de Materiais procurou-se considerar um elevado grau de desagregação em Sectores para permitir distinguir os efeitos da actividade da Construção nas várias indústrias de Materiais. No entanto, dada a enorme variedade de materiais utilizados na construção foi necessário deixar de considerar alguns de menor incidência nas obras para não tornar o número de sectores excessivamente elevado. Consideram-se, entretanto, agregados alguns elementos de construção que utilizam tecnologias bem características. Destes condicionamentos resultou a consideração da série de 36 materiais de construção a seguir descriminados. As unidades de produção adoptadas foram as já consagradas nas estatísticas nacionais ou aquelas para as quais pareceu mais fácil a obtenção de preços de mercado.

M/01 — PEDRA PARA ALVENARIA E ENROCAMENTOS (m^3)

Considera a pedra utilizada na execução de alvenarias, com ou sem faces vistas, de betões ciclópicos e de enrocamentos.

M/02 — MÁRMORES E CANTARIAS (m^3)

Considera os mármores e as pedras de cantaria como os calcáreos, os conglomerados e os granitos, quando utilizados em:

— soleiras, peitoris, ombreiras e vergas de vãos;

— capeametnos e lancis;

— revestimentos exteriores e interiores de paredes, de pavimentos e de escadas;

— tampos de bancadas e lareiras

M/03 — AREIA (m^3)

Considera o inerte natural ou britado utilizado na fabricação de argamassas e betões aplicados em obra, portanto com exclusão da areia utilizada na execução de produtos em fábrica.

M/04 — BRITA (m^3)

Consideram-se os inertes de pedra britada e os godos naturais utilizados no fabrico de betões betuminosos, de enrocamentos para fundações de estradas e aeródromos, e de macadames.

Excluem-se da avaliação do consumo os agregados de argila expandida e as britas naturais utilizadas na execução de produtos em fábrica.

M/05 — CIMENTO (kg)

Consideram-se neste sector todos os cimentos utilizados na construção: cimentos Portland, cimentos brancos, cimentos pozolânicos, cimentos de escórias e cimentos especiais.

Na avaliação do consumo não se inclui o cimento utilizado na execução de produtos em fábrica (por exemplo de caixilharia de betão moldado, blocos de betão, manilhas de betão e vigotas pré-esforçadas).

M/06 — CAL (kg)

Considera a cal gorda (em pedra ou em pó) e os vários tipos de cais hidráulicas, nas suas aplicações correntes — argamassas, massas para estuques, caiações, etc.

M/07 — GESSO (kg)

Considera apenas os gessos de presa utilizados na execução de esboços e estuques.

Não se inclui o gesso utilizado na fabricação de estafes.

M/08 — MANILHAS DE BETÃO (m)

Considera os tubos de betão, armados ou não, utilizados em canalizações de águas pluviais, drenagens e enfiamento de cabos eléctricos.

M/09 — LADRILHOS HIDRÁULICOS (m^2)

Considera os ladrilhos de pasta de cimento e os de granulados utilizados no revestimento de pavimentos e terraços, e em rodapés e lambris.

M/10 — CHAPA DE FIBROCIMENTO (m^2)

Considera as chapas lisas ou onduladas e os canaletes de fibrocimento utilizados em coberturas e revestimento de paredes de edifícios.

M/11 — TUBOS DE FIBROCIMENTO (m)

Considera os tubos de fibrocimento, circulares ou rectangulares, utilizados em canalizações de água, redes de esgoto, tubos de queda, drenagens e condutas de lixo.

M/12 — TIJOLOS CERÂMICOS (Unidade)

Considera os tijolos de barro vermelho dos vários tipos utilizados correntemente na execução de alvenarias.

Incluem-se ainda algumas peças especiais utilizadas em condutas de ventilação e fugas de chaminés, e em canais para cabos.

M/13 — BLOCOS DE COFRAGEM CERÂMICOS (Unidade)

Considera os blocos de barro vermelho utilizados como cofragem e enchimento em pavimentos e coberturas aligeiradas de vigotas pré-esforçadas.

M/14 — TELHAS CERÂMICAS (Unidade)

Considera os vários tipos de telhas cerâmicas de barro vermelho utilizadas em coberturas (Marselha, Lusa, etc.), incluindo acessórios correntes tais como cumeeiras, beirados e telhas passadeiras.

M/15 — TIJOLEIRAS E LADRILHOS CERÂMICOS (m^2)

Considera as tijoleiras cerâmicas utilizadas no revestimento de paredes e pavimentos e todos os tipos de ladrilhos de grés cerâmico e de Klinker utilizados no revestimento de pavimentos, rodapés, lambris, terraços, escadas, peitoris e caleiras.

M/16 — TUBOS DE GRÉS (m)

Considera os tubos de grés cerâmico, utilizados em redes de esgoto.

M/17 — AZULEJOS (m^2)

Considera os azulejos de faiança fina, lisos ou decorativos, utilizados no revestimento de lambris e rodapés.

M/18 — LOIÇA SANITÁRIA (Peça)

Considera as peças de loiça sanitária — porcelana, grés fino e faiança — utilizadas nas instalações sanitárias de edifícios: lavatórios, bidés, bacias de retrete, urinóis de coluna e de parede e cuvas de duche.

M/19 — AÇO EM PERFILADOS (kg)

Considera o aço sob a forma de perfis, tais como as cantoneiras L e T, os I, U, etc. e varões circulares e poliédricos de secção cheia ou vasada (excepto os utilizados em betão armado). Incluem-se ainda as estacas-pranchas metálicas ou outros perfis de aço com excepção do ferro fundido, galvanizado ou forjado.

M/20 — AÇO PARA BETÃO (kg)

Considera o aço das várias classes utilizado nos varões das armaduras do betão armado e o aço dos cabos, varões e fios, e elementos de ancoragem do betão pré-esforçado.

Não se inclui o aço utilizado nas vigotas pré-esforçadas.

M/21 — TUBOS METÁLICOS (m)

Considera os tubos de ferro fundido e galvanizado, cobre e chumbo utilizados em canalizações de águas quentes e frias, esgotos e de gás.

M/22 — CAIXILHARIA METÁLICA (m^2)

Considera a caixilharia de perfis de alumínio anodizado e ferro forjado utilizado em janelas, portas e envidraçados fixos.

M/23 — FERRAGENS (Peça)

Considera globalmente as várias espécies de ferragens utilizadas em portas e janelas, e mobiliário fixo, tais como: fechaduras, fechos, fichas, trincos, molas e puxadores.

M/24 — MADEIRA PARA COFRAGEM (m^3)

Considera a madeira aparelhada, utilizada na cofragem e escoramento de elementos de betão.

M/25 — PORTAS DE MADEIRA (m^2)

Considera todas as portas de madeira exteriores e interiores e de mobiliário fixo, folheadas ou envidraçadas incluindo os guarnecimentos dos vãos (aros e batentes).

M/26 — CAIXILHARIA DE MADEIRA (m^2)

Considera os caixilhos e os envidraçados fixos de madeira de janelas e mobiliário fixo, incluindo os guarnecimentos dos vãos.

M/27 — TACOS DE MADEIRA (m^2)

Considera a madeira sob a forma de tacos e de parquetes utilizada no revestimento de pisos.

M/28 — TINTAS E VERNIZES (litro)

Considera os tipos de tintas, vernizes e produtos análogos, utilizados na construção:

— tintas para preparação de fundos (primários, betumes, subcapas);

— tintas de esmalte;

— tintas de água;

— tintas plásticas;

— corantes, secantes e isolantes;

— endurecedores e diluentes;

— vernizes.

M/29 — CHAPA DE PLÁSTICO (m^2)

Considera as chapas rígidas de plástico (cloreto de polivinilo ou poliester reforçado com fibra de vidro), utilizadas no revestimento de paredes e coberturas de edifícios.

M/30 — TUBOS DE PLÁSTICO (m)

Considera os tubos de plástico (P. V. C. ou polietileno) utilizadas em canalizações de água, redes de esgoto, ventilação e drenagem de solos.

M/31 — LADRILHOS PLÁSTICOS (m^2)

Considera os mosaicos vinílicos utilizados no revestimento de pavimentos e rodapés.

M/32 — CHAPA DE VIDRO (m^2)

Considera todos os tipos de vidraças e vidros espelhados utilizados em portas e janelas envidraçadas e mobiliário fixo.

M/33 — VIGOTAS PRÉ-ESFORÇADAS (m)

Considera as vigotas de betão pré-esforçado utilizadas nos pavimentos aligeirados e na estrutura de coberturas (varas e ripas), e as pranchas cerâmicas pré-esforçadas utilizadas nos pavimentos aligeirados.

M/34 — PARQUETES E AGLOMERADOS DE CORTIÇA (m^2)

Considera os ladrilhos e mosaicos de cortiça utilizados no revestimento de pavimentos e rodapés e as placas de aglomerados, nomeadamente o aglomerado negro, utilizadas em isolamentos térmicos e acústicos e em juntas de dilatação.

M/35 — BETUME ASFÁLTICO (kg)

Considera o betume asfáltico utilizado em impermeabilizações, regas betuminosas e na fabricação de betões betuminosos.

M/36 — TELAS ASFÁLTICAS (m^2)

Considera as telas asfálticas e os feltros betuminosos, utilizados em impermeabilizações de edifícios, nomeadamente em coberturas de terraço.

3 — RECOLHA DA INFORMAÇÃO

3.1 — *Sistema de amostragem*

Quando se pretende conhecer de forma precisa um conjunto constituído por grande número de elementos, como é o caso do conjunto das obras dum dado Sector, limita-se o estudo a uma amostra de elementos representativos dos elementos do conjunto e extrapolam-se os resultados para o conjunto total.

Assim, para cada Sector de obras, foi necessário fixar a dimensão da amostra (número de obras) e fazer a selecção dos elementos (obras) a estudar.

Na selecção das obras a incluir em cada amostra procurou-se atender à variabilidade das obras do Sector, fazendo uma amostragem estratificada. Assim, os Sectores são divididos em classes de obras (Sectores de obras classificadas) em função de características físicas relevantes tais como o tipo de estrutura resistente, número de pisos, etc. de cada uma das quais se escolhe um certo número que combinadas formam a amostra do Sector. Nalguns Sectores, no entanto, o desconhecimento do peso de cada uma das classes tornou o processo impraticável, sendo então os conjuntos de obras considerados globalmente (Sectores de obras não classificadas); as obras analisadas foram seleccionadas por um processo de escolha dirigida, em função de certas características específicas por forma a obter, para cada Sector de obras, uma amostra suficientemente representativa das obras do Sector.

Na determinação do número de obras a incluir em cada classe da amostra (ou na amostra global em sectores de obras não classificadas) procurou-se fazer uma imputação proporcional em que o número de elementos seleccionados é proporcional ao número total de elementos do conjunto.

3.2 — *A informação recolhida*

O trabalho foi programado no sentido de serem analisadas 20% das obras construídas no país no ano que serve de referência ao estudo, 1970. Admitiam-se, evidentemente, algumas flutuações já que esta percentagem pode ser representativa dum Sector com grande produção de obras mas todas idênticas e não o ser dum Sector com reduzida produção de obras mas de grande vulto e diferentes umas das outras.

Na generalidade dos sectores esta representatividade percentual foi bastante ultrapassada embora não seja possível conhecer com rigor a produção de obras no referido ano na maior parte deles.

Os quadros Q1, Q2 e Q3 sintetizam o trabalho realizado:

Em Edifícios, em termos gerais, o programa inicial foi cumprido já que a área total de pavimentos analisada representa precisamente 20% da área total de pavimentos concluídos em 1970, conforme mostra o quadro Q4, obtido das Estatísticas da Construção e da Habitação, 1970 [6]. Do mesmo quadro se infere que no sector de Edifícios para Habitação Social a amostra analisada é francamente representativa com cerca de 45% do total produzido.

No Sector de Edifícios para Habitação de Rendimento a área analisada representa apenas 6% do total de pavimentos construídos, dada a dificuldade de obtenção de projectos deste sector de obras, particularmente no que se refere aos pequenos edifícios; no entanto este é também o sector que apresenta maior repetividade de processos e tipos da construção. Aliás, em França, o BIPE — Bureau d'Informations et de Prévisions Economiques [7], [10], considera como representativa uma amostra de 10% deste tipo de obras.

Para os outros Sectores de obras de Edifícios não há possibilidade de conhecer com exactidão a respectiva produção de obras. De acordo com estimativas entretanto elaboradas as respectivas amostras de projectos terão a seguinte representatividade:

Edifícios para Escritórios	— 64%
Edifícios Industriais	— 19%
Edifícios Hoteleiros	— 67%
Edifícios Escolares	— 73%
Edifícios Hospitalares	— 190%

Para os Sectores considerados em Vias de Comunicação e Obras Hidráulicas não há possibilidade de aferir da representatividade das amostras de projectos analisados já que não existem dados sobre a produção destas obras no ano que serve de base ao estudo, 1970. Apenas para o Sector de Estradas existem dados publicados pelo G. P. da Junta Autónoma de Estradas [11] que permitem concluir ser a produção destas obras sensivelmente equivalente às obras analisadas. Para os outros Sectores pode-se no entanto garantir tratar-se de amostras de representatividade pelo menos equivalente.

3.3 — *Operação «análise de projectos»*

É a operação através da qual se obtém a informação sobre as obras em estudo que permite a sua caracterização e o cálculo dos índices de consumo dos materiais em cada obra. Os elementos utilizados foram, normalmente, as peças do projecto da obra, nomeadamente o Mapa de Medições, o Caderno de Encargos e as Peças Desenhadas de definição geométrica.

Esta operação engloba, em geral, as seguintes fases:

a) *Medições das quantidades dos trabalhos constituintes da obra*

Normalmente estes dados obtiveram-se do Mapa de Medições do projecto; quando não se dispôs de tal Mapa elaboraram-se as medições com base nas Peças Desenhadas e no Caderno de Encargos. Não foram considerados os trabalhos relativos a Instalações Especiais como por exemplo, na caso de Edifícios, as Instalações Eléctricas, as de Condicionamento, etc.

b) *Determinação da quantidade de produção da obra*

Consistiu, conforme os casos, na medição de:

— área total dos pavimentos dos Edifícios;

— área pavimentada de Estradas, Auto-estradas e Aeroportos e Aeródromos;

— área do tabuleiro de Pontes e Viadutos;

— volume de betão aplicado em obra no caso de Obras Hidráulicas.

Simultaneamente compila-se informação sobre outras características físicas relevantes da obra para sua completa caracterização.

c) *Determinação das quantidades dos materiais consumidos na execução de cada trabalho da obra.*

Em geral, foi feita a partir das «Fichas de informação sobre custos» elaboradas no LNEC. No caso de trabalhos pouco comuns ou muito especializados, para os quais não se dispunha da «Ficha» respectiva, as quantidades dos materiais necessários à execução da unidade de trabalho estão especificadas no Caderno de Encargos de projecto. Quando tal não acontece ou não houve possibilidade de consultar o respectivo Caderno de Encargos, recorreu-se à consulta ao projectista ou à empresa construtora da obra.

QUADRO Q1

Informação recolhida em EDIFÍCIOS

SECTORES	PROJECTOS ANALISADOS	AREA DE PAVIMENTOS ANALISADA (m²)
EDIFÍCIOS PARA HABITAÇÃO SOCIAL	44	134 807
» PARA HAB. DE RENDIMENTO	38	142 233
» PARA ESCRITÓRIOS	17	139 408
» INDUSTRIAIS	15	67 443
» HOTELEIROS	7	101 487
» ESCOLARES	11	58 532
» HOSPITALARES	11	123 779
TOTAL	143	767 689

QUADRO Q2

Informação recolhida em VIAS DE COMUNICAÇÃO

SECTORES	PROJECTOS ANALISADOS	AREA DE PAVIMENTOS ANALISADA (m²)
ESTRADAS	19	1 067 752
AUTO-ESTRADAS	7	1 168 369
PONTES E VIADUTOS	13	46 871 (*)
AEROPORTOS E AERÓDROMOS	10	533 390
TOTAL	49	2 816 382

QUADRO Q3

Informação recolhida em OBRAS HIDRÁULICAS

SECTORES	PROJECTOS ANALISADOS	VOLUME APLICADO DE BETÃO (m³)
BARRAGENS	8	1 437 550
PORTOS E TRAB. MARÍTIMOS	4	222 228
TOTAL	12	1 659 778

(*) área do tabuleiro

QUADRO Q4

Significância da informação recolhida em EDIFÍCIOS

SECTORES	AREA DE PAVIMENTOS CONCLUIDOS EM 1970 (m²)	AREA DE PAVIMENTOS ANALISADA (m²)	
EDIFÍCIOS PARA HAB. SOCIAL	299 476	134 807	45%
EDIFÍCIOS PARA HAB. DE RENDIMENTO	2 365 258	142 233	6%
RESTANTES EDIFÍCIOS (Escritórios, Industriais, Hoteleiros, Escolares, Hospitalares, etc).	1 073 852	490 649	46%
TOTAL	3 738 586	767 689	20%

A conversão dos trabalhos em materiais fez-se em Folhas de Informação Intermédia, conforme o exemplo apresentado.

d) *Determinação da quantidade total de cada material consumido na execução da obra*

Obtém-se fazendo a soma das quantidades parciais de cada material, consumido na execução dos vários trabalhos. As quantidades totais dos vários materiais registam-se em Quadros — Resumo, conforme o exemplo apresentado. No Quadro — Resumo duma obra regista-se também a quantidade total de produção da obra e os demais elementos para a sua caracterização.

e) *Determinação dos Índices de Consumo dos Materiais em cada obra*

Obtém-se dividindo as quantidades totais dos materiais consumidos em cada obra pela quantidade total de produção da obra, conforme se mostra no exemplo apresentado.

5 — ELABORAÇÃO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES TÉCNICOS

4.1 — *Cálculo dos coeficientes técnicos*

Tal como atrás foi referido, define-se *coeficiente técnico material/obra* - a_{ij}, o coeficiente que relaciona a aplicação nas obras do sector O_j duma dada quantidade do material M_i referida á unidade de produção desse tipo de obra.

Os coeficientes técnicos relativos a um dado Sector de Obras obtém-se pela média dos índices de consumo dos materiais nas obras analisadas pertencentes ao Sector.

Para os Sectores de obras não divididos em classes (Sectores de obras não classificadas) os coeficientes técnicos a_{ij} obtêm-se pela média aritmética dos índices de consumo dos materiais nas obras analisadas em cada sector.

$$a_{ij} = \frac{1}{N_j} \sum_{p=1}^{N_j} x_{ijp}$$

em que:

N_j — número de índice de consumo do material M_i no sector O_j.

x_{ijp} — índice de consumo de material M_i na obra p do sector O_j.

Quando o sector de obras O_j está dividido em classes de obras (k) (Sector de obras classificadas) os coeficientes técnicos a_{ij}, obtêm-se pela média ponderada das médias aritméticas dos índices em cada uma das classes:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{jk} \frac{1}{N_{jk}} \sum_{p=1}^{N_{jk}} x_{ijkp}$$

em que:

K — número de classes de obras do Sector O_j;

α_{jk} — coeficiente de ponderação da classe k do Sector O_j;

N_{jk} — número de índices de consumo do material M_i na classe k do Sector O_j;

x_{ijkp} — índice de consumo do material M_i na obra p da classe k do Sector O_j.

O coeficiente de ponderação α_{jk} relativo à classe k do Sector O_j, representa o peso (em percentagem), das obras da classe no total de obras do Sector construídas em 1970; se for F_{jk} a produção de obras da classe e F_j a produção de obras do Sector o coeficiente de ponderação define-se pela relação:

$$\alpha_{jk} = \frac{F_{jk}}{F_j}$$

Se as classes de obras dum Sector estão, por sua vez, divididas em sub-classes os coeficientes técnicos a_{ij} serão então dados pela expressão:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{jk} \sum_{l=1}^{L} \beta_{jkl} \frac{1}{N_{jkl}} \sum_{p=1}^{N_{jkl}} x_{ijklp}$$

INFORMAÇÃO INTERMÉDIA

Código — 0/02 - 19/02

TRABALHOS EM OBRA			MATERIAIS			OBS.
Designação	Unid.	Quantidade	Designação	Unid.	Quantidade	
Betão B180, com 300 Kg cimento em paredes c/10 cm de espessura	m²	301,38	cimento	Kg	9041	
			areia	m³	11,9	
			brita	m³	32,2	
Alvenaria de tijolo furado de 30×22×20, c/20, traço 1:5	m²	868,18	tijolos	un	13023	
			cimento	Kg	6727	
			areia	m³	24,0	
Idem, idem, c/22, traço 1:5	m²	1533,87	tijolos	un	24542	
			cimento	Kg	15084	
			areia	m³	53,9	
Idem, de 30×20×15 c/15, traço 1:5	m²	165,28	tijolos	un	2644	
			cimento	Kg	1084	
			areia	m³	3,9	
Idem, de 30×20×11 c/11, traço 1:5	m²	2164,39	tijolos	un	34630	
			cimento	Kg	10320	
			areia	m³	36,9	
Idem, de 30×20×7 c/7, traço 1:5	m²	199,43	tijolos	un	3191	
			cimento	Kg	594	
			areia	m³	2,1	
Idem, de 22×11×7 c/7, traço 1:5	m²	430,68	tijolos	un	15504	
			cimento	Kg	2053	
			areia	m³	7,3	
Alvenaria de tijolo de vidro c/20×20, traço 1:5	m²	56,25	tijolo de vidro	un	1406	
			cimento	Kg	419	
			areia	m³	1,5	
Mármore de Estremoz em pavimentos c/3 cm, traço 1:4	m²	197,19	mármore	m³	5,92	
			cimento	Kg	2112	
			areia	m³	6,0	

QUADRO-RESUMO

	MATERIAL	QUANT.	Unid.	QUANT/m²
M/01	Pedra p/alvenaria e enrocamentos	—	m³	—
M/02	Mármores e cantarias	7,2	m³	0,011
M/03	Areia	174,8	m³	0,259
M/04	Brita	230,5	m³	0,342
M/05	Cimento	85 286	Kg	126,7
M/06	Cal	2 406	Kg	3,57
M/07	Gesso	614	Kg	0,912
M/08	Manilhas de betão	—	m	—
M/09	Ladrilhos hidráulicos	301,47	m²	0,447
M/10	Chapa de fibrocimento	—	m²	—
M/11	Tubos de fibrocimento	—	m	—
M/12	Tijolos de barro vermelho	24 202	Un	35,96
M/13	Blocos de cofragem cerâmicos	4 548	Un	6,76
M/14	Telhas cerâmicas	2 124	Un	3,16
M/15	Tijoleiras e ladrilhos cerâmicos	—	m²	—
M/16	Tubos de grés	43,0	m	0,064
M/17	Azulejos	166,50	m²	0,247
M/18	Loiça sanitária	20	Peça	0,030
M/19	Aço em perfilados	187	Kg	0,278
M/20	Aço para betão	7 695	Kg	11,43
M/21	Tubos metálicos	115,0	m	0,171
M/22	Caixilharia metálica	—	m²	—
M/23	Ferragens	506	Peça	0,752
M/24	Madeira para cofragem	15,6	m³	0,023
M/25	Portas de madeira	74,13	m²	0,110
M/26	Caixilharia de madeira	50,32	m²	0,074
M/27	Tacos de madeira	252,20	m²	0,375
M/28	Tintas e vernizes	278,8	l	0,414
M/29	Chapas de plástico	—	m²	
M/30	Tubos de plástico	152,0	m	0,226
M/31	Ladrilhos plásticos	—	m²	—
M/32	Chapa de vidro	46,0	m²	0,068
M/33	Vigotas pré-esforçadas p/pavimentos	1777,0	m	2,640
M/34	Parquetes e aglom. de cortiça	40,0	m²	0,059
M/35	Betume asfáltico	—	Kg	—
M/36	Telas asfálticas	—	m²	—

OBRA
O/01-31

Sector de obras
EDIF. HAB. SOCIAL

Tipo de estrutura
B A

Número de pisos
5

Tipo dos edifícios
E B L

Número de fogos
10

Área de pavimentos
673 m³

Área de cobertura
140 m²

Orçamento

Localização
CALDAS DA RAINHA

Ano de construção
1 9 7 1

OBS.

em que:

K — número de classes de obras do Sector O_j;

α_{jk} — coeficiente de ponderação da classe k do Sector O;

L — número de sub-classes da classe k;

β_{jkl} — coeficiente de ponderação da sub-classe l da classe k do Sector O_j;

N_{jkl} — número de índices de consumo do material M_i pertencentes à sub-classe l da classe k do Sector O_j;

x_{ijklp} — índice de consumo do material M_i na obra p da sub-classe l da classe k do Sector O_j.

O coeficiente de ponderação β_{jkl} da sub-classe l define-se pela relação entre a produção de obras da sub-classe l — F_{jkl} — e a produção total da classe k, — F_{kj}

$$\beta_{jkl} = \frac{F_{jkl}}{F_{jk}}$$

Os coeficientes de ponderação α_{jk} e β_{jkl} das várias classes e sub-classes de obras foram calculados a partir das Estatísticas da Construção e da Habitação — 1970 [6], dos resultados dum inquérito à Construção de Edifícios que o INE realizou em 1970 e do relatório relativo à Construção de Obras Públicas em 1970 [12].

Foram divididos em classes os Sectores O/02 — Edifícios para Habitação de Rendimento e O/06 — Edifícios Escolares, em função, respectivamente, do número de pisos dos edifícios e do tipo de escola. O Sector O/01 — Edifícios para Habitação Social foi dividido em classes e sub-classes em função, respectivamente, do tipo de estrutura resistente e do número de pisos dos edifícios. Todos os outros Sectores foram considerados globalmente, sem divisão em classes de obras.

4.2 — *Considerações sobre a Matriz dos coeficientes técnicos*

O quadro que representa a Matriz dos coeficientes técnicos materiais/obras sugere algumas considerações de análise sobre os valores apresentados, tendo em vista as utilizações que deles venham a ser feitas.

Em primeiro lugar, importa frizar que esta Matriz resultou dum trabalho orientado segundo determinada metodologia a que são inerentes certo número de limitações, algumas já oportunamente referidas. Podem salientar-se:

— listagem não exaustiva tanto de «obras» como de «materiais» que intervêm no processo de produção da Construção;

— insuficiente caracterização das obras dos pequenos edifícios do Sector Edifícios para Habitação de Rendimento;

— inexistência de ponderação dos índices de consumo dos materiais em função do peso relativo de cada obra, em grande parte dos Sectores de Obras;

— informação correspondente a um período de tempo (1967 - 1973) caracterizado por determinada estrutura da procura de obras e por tecnologias que vão sofrendo alterações no tempo.

Outra questão importante e intimamente ligado ao valor dos coeficientes técnicos da Matriz é a possibilidade de substituição de materiais uns pelos outros na mesma obra e para a mesma função. Assim, na estrutura actual da indústria da Construção, existem materiais cuja utilização é praticamente obrigatória e outros materiais que são susceptíveis de substituição por outros equivalentes nas suas utilizações correntes. Esta situação que é mais clara no caso de Edifícios é também visível nos outros Sectores de Obras. Para os materiais de uso não alternativo, os índices de consumo nas obras de determinado Sector pouco variam e estabilizam em torno de valores médios que serão os coeficientes técnicos respectivos. No caso de materiais alternativos, os índices de consumo desses materiais nas obras de dado Sector, podem variar muito, desde um valor máximo — que corresponde à utilização exclusiva do material — até valor nulo, ainda que as somas dos índices de grupos de materiais equivalentes pouco variem. Os coeficientes técnicos destes materiais podem, portanto, variar conforme o seu grau de utilização.

É também de referir que os coeficientes técnicos da Matriz representam apenas valores médios dos consumos dos materiais em cada tipo de obras, caracterizando a repartição sectorial dos consumos e não o consumo dos materiais em cada obra específica. Assim, os coeficientes técnicos poderão ser utilizados no estudo de previsões de consumos globais dos materiais de construção mas não para prever o consumo dum dado material numa obra específica.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE PARADA, J. — *El análisis input-output; una aplicación al sector cemento.* Informes de la Construccion n.º 162 — Instituto Eduardo Torroja de la construción y del cemento, Madrid, 1964.

[2] LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL (LNEC) — *Missão a França do engenheiro tarefeiro António Fonseca Ferreira;* Estágio no Bureau d'informations et de prévisions economiques — BIPE. LNEC, 1973.

[3] NIJKAMP, P.; PAELINCK, J. H. — *Some methods for updating input-output tables.* Rotterdam, 1973.

[4] INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO INDUSTRIAL (INII) — *Resutados provisórios da construção da 1.ª Matriz Portuguesa de Relações Interindustriais*. Documento de trabalho RFI-INII, Lisboa, 1973.

[5] INII — *Relações Interindustriais* — 1967. Série Estudos n.º 4 — INII, Lisboa, 1968.

[6] INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA (INE) — *Estatísticas da Construção e da Habitação* — 1970. INE, 1971.

[7] BUREAU D'INFORMATIONS ET DE PRÉVISIONS ECONOMIQUES (BIPE) — *Prodution par région de la branche bâtiment et genie civil em 1969 e 1970; prévision pour 1971*. Paris, 1971.

[8] LNEC — *Caderno de Encargos - tipo para a Construção de Edifícios*. Documentos Parciais, LNEC, Lisboa.

[9] LNEC — *Fichas de Informação sobre custos*. LNEC, Lisboa, 1971.

[10] BIPE — *Mesure des coefficients techniques de consommation de matériaux*. BIPE, Paris, 1969.

[11] JUNTA AUTÓNOMA DE ESTRADAS (JAE) — *Relatório da Actividade da Junta Autónoma de Estradas em 1970*. Gabinete de Estudos e Planeamento, Lisboa 1971.

[12] MINISTÉRIO DAS OBRAS PÚBLICAS (MOP) — *Obras concluidas em 1970:* Anexo n.º 21 ao «Boletim do Comissariado do Desemprego», Lisboa, 1971.

MATRIZ DOS COEFICIENTES TÉCNICOS

OBRAS \ MATERIAIS	PEDRA PARA ALVENARIA E ENROCAMENTOS m^3 M/01	MÁRMORES E CANTARIAS m^3 M/02	AREIA m^3 M/03	BRITA m^3 M/04	CIMENTO kg M/05	CAL kg M/06	GESSO kg M/07	MANILHAS DE BETÃO m M/08	LADRILHOS HIDRÁULICOS m^2 M/09	CHAPA DE FIBROCIMENTO m^2 M/10	TUBOS DE FIBROCIMENTO m M/11	TIJOLOS DE BARRO VERMELHO unid. M/12	BLOCOS DE COFRAGEM CERÂMICOS unid. M/13	TELHAS CERÂMICAS unid. M/14	TIJOLEIRAS E LADRILHOS CERÂMICOS m^2 M/15	TUBOS DE GRÉS m M/16	AZULEJOS m^2 M/17	LOIÇA SANITÁRIA peça M/18	AÇO EM PERFILADOS kg M/19	AÇO PARA BETÃO kg M/20	TUBOS METÁLICOS m M/21	CAIXILHARIA METÁLICA m^2 M/22	FERRAGENS peça M/23	MADEIRA PARA COFRAGEM m^3 M/24	PORTAS DE MADEIRA m^2 M/25	CAIXILHARIA DE MADEIRA m^2 M/26	TACOS DE MADEIRA m^2 M/27	TINTAS E VERNIZES l M/28	CHAPA DE PLÁSTICO m^2 M/29	TUBOS DE PLÁSTICO m M/30	LADRILHOS PLÁSTICOS m^2 M/31	CHAPA DE VIDRO m^2 M/32	VIGOTAS PRÉ-ESFORÇADAS PARA PAVIMENTOS m M/33	PARQUETS E AGLOMERADOS DE CORTIÇA m^2 M/34	BETUME ASFÁLTICO kg M/35	TELAS ASFÁLTICAS m^2 M/36
O/01 - EDIFÍCIOS PARA HABITAÇÃO SOCIAL /m^2 pav.	0,17	0,002	0,34	0,29	133	11,8	0,35	0,003	0,10	0,05	0,023	28,8	4,2	5,70	0,15	0,10	0,06	0,033	0,95	11,1	0,30	0,003	1,21	0,024	0,160	0,097	0,38	0,55	-	0,19	-	0,09	1,21	0,021	0,43	0,03
O/02 - EDIFÍCIOS PARA HABITAÇÃO DE RENDIMENTO /m^2 pav.	0,06	0,008	0,29	0,41	145	8,2	1,50	0,009	0,11	0,08	0,030	32,6	2,3	6,17	0,27	0,06	0,28	0,030	0,42	14,8	0,42	0,075	0,88	0,020	0,110	0,064	0,28	1,19	0,002	0,18	0,013	0,15	0,84	0,017	1,23	0,55
O/03 - EDIFÍCIOS PARA ESCRITÓRIOS /m^2 pav.	0,07	0,010	0,30	0,48	170	5,1	1,13	0,009	0,14	0,01	0,020	17,3	2,3	2,52	0,22	0,12	0,23	0,022	1,72	25,7	0,23	0,180	0,74	0,026	0,069	0,012	0,19	0,66	0,067	0,08	0,097	0,20	0,58	0,180	1,52	0,62
O/04 - EDIFÍCIOS INDUSTRIAIS /m^2 pav.	0,06	0,001	0,19	0,33	104	2,2	0,01	0,030	0,15	0,39	0,007	13,3	1,2	0,11	0,08	0,03	0,04	0,007	15,20	13,7	0,06	0,072	0,20	0,013	0,007	0,004	-	0,76	0,058	0,05	0,084	0,07	0,28	0,007	1,62	0,29
O/05 - EDIFÍCIOS HOTELEIROS /m^2 pav.	0,09	0,006	0,27	0,44	156	2,8	0,48	0,005	0,03	-	0,004	20,4	0,3	1,16	0,23	0,09	0,19	0,030	1,77	25,7	0,69	0,072	0,53	0,021	0,089	0,025	0,02	0,96	0,016	0,17	0,030	0,11	0,33	0,160	1,88	0,75
O/06 - EDIFÍCIOS ESCOLARES /m^2 pav.	0,15	0,010	0,33	0,55	159	3,8	0,24	0,026	0,24	0,36	0,069	20,4	6,5	5,33	0,07	0,14	0,09	0,024	1,31	21,1	0,27	0,033	0,74	0,024	0,066	0,140	0,42	0,78	0,046	0,27	0,025	0,17	2,01	0,018	3,41	0,22
O/07 - EDIFÍCIOS HOSPITALARES /m^2 pav.	0,23	0,019	0,41	0,53	192	7,3	1,91	0,038	0,23	0,09	0,016	30,8	2,7	3,83	0,20	0,22	0,22	0,032	0,61	19,2	0,77	0,071	0,60	0,023	0,110	0,083	0,09	1,36	0,009	0,18	0,160	0,15	0,85	0,260	2,16	0,75
O/08 - ESTRADAS /m^2 pav.	0,07	0,003	0,04	0,35	10	-	-	0,014	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,10	0,35	-	-	-	-	-	-	-	0,008	-	-	-	-	-	-	5,1	-
O/09 - AUTOESTRADAS /m^2 pav.	0,04	0,004	0,09	0,50	17	-	-	0,038	-	-	-	0,04	-	-	-	0,004	-	-	0,49	1,55	-	-	-	0,001	-	-	-	0,010	-	0,002	-	-	-	-	13,1	-
O/10 - PONTES E VIADUTOS /m^2 tabuleiro	0,16	0,012	0,51	1,35	423	-	-	-	0,06	-	0,001	0,42	-	-	0,04	-	-	-	17	209	0,034	-	-	0,110	-	-	-	0,13	-	0,22	-	-	-	0,014	5,1	-
O/11 - AEROPORTOS E AERÓDROMOS /m^2 pav.	-	-	0,15	0,53	69	-	-	0,019	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,64	0,004	-	-	-	-	-	-	0,006	-	0,021	-	-	-	-	12,5	-
O/12 - BARRAGENS /m^3 betão	1,64	-	0,41	1,09	280	-	-	0,300	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,63	7,4	0,026	-	-	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
O/13 - PORTOS E TRABALHOS MARÍTIMOS /m^3 betão	1,49	-	0,50	1,18	314	-	-	0,007	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	143	58	0,004	-	-	0,021	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,8	-

Técnicas de retenção osciloscópica(*)

por GALE SALMON
Gould Advance Ltd.

A possibilidade de reter sinais num osciloscópio é um dos mais importantes desenvolvimentos no campo de técnicas osciloscópicas que surgiu nos últimos anos. Um osciloscópio de retenção é designado para capturar, para fins de visualização amplificada, uma forma-de-onda que pode ser repetitiva ou transiente. A aplicação mais comum é no exame detalhado de fenómenos monocurso transientes, mas os osciloscópios de retenção também podem ser usados para visualizar sinais de baixa frequência sem tremulação, e ainda para misturar bandas de baixa e alta frequência a graus altos ou baixos de sensibilidade.

Retenção em registos reais («hard-copy»)

Antes de discutir os osciloscópios de retenção propriamente ditos, talvez valha a pena mencionar que existem várias outras técnicas de registo e retenção de formas-de-onda. O método mais simples de retenção consiste em utilizar uma câmara tipo Polaroid para fotografar a face do tubo osciloscópio. Existem câmaras especiais que se fixam ao painel frontal do instrumento, formando uma montagem impermeável à luz que permite o funcionamento da câmara com o obturador aberto de modo que traços transientes podem ser capturados. Câmaras de mão, dos modelos mais simples, podem ser adaptadas para uso com osciloscópios, embora sejam mais apropriadas para exposições mais demoradas de traços persistentes.

Técnicas fotográficas só podem ser exploradas a fundo em osciloscópios cuja gratícula é iluminada, e ainda mais vantajosamente em osciloscópios que apresentam calibragens reguláveis das escalas horizontal e vertical.

A principal vantagem das técnicas fotográficas é a sua simplicidade e o facto de proporcionarem um registo permanente «hard-copy»; contudo, a película usada é bastante cara para aplicações do dia-a-dia se apenas for requerido um exame de curta duração.

Registos do tipo «hard-copy» também podem ser obtidas se se utilizar, em conjunto com o osciloscópio, um sistema registador de banda gráfica ou de estilete X-Y. Tais sistemas podem ser usados directamente para aplicações a baixa velocidade ou para sinais repetitivos a alta velocidade, se forem empregados em conjunto com um osciloscópio discriminador. O papel de gráficos é mais barato que a película Polaroid, mas as aplicações possíveis são relativamente limitadas.

Osciloscópios de tubo de retenção

Para fins gerais, o instrumento de uso mais comum para retenção de traços a curto e médio prazo é o osciloscópio de tubo de retenção, do tipo de vista directa. Do ponto de vista do operador, ele combina num só as vantagens de três instrumentos: um osciloscópio standard na moda «normal»; a possibilidade de retenção integral, permitindo reter formas-de-onda durante várias horas, ou reproduzi-las depois do instrumento ter sido desligado, mesmo passado vários dias; e a moda de persistência-variável, oferecendo uma variação de persistência de alcance muito mais vasto do que é possível obter com um P31 standard ou um P7-fósforo em osciloscópios convencionais.

Num osciloscópio de tubo de retenção, o sinal-informação proveniente do disparador electrónico normal de «impressão» embate contra uma camada-memória constituída por um material não-condutor de alta qualidade, e forma uma gravação de carga positiva por meio de emissão secundária de electrões. A gravação permanece na superfície-memória durante um longo período, e o facto de se desligar o disparador de impressão não produz qualquer efeito. Para tornar a gravação visível, é empregado um segundo feixe electrónico dirigido, de baixa velocidade; este feixe incide sobre o fósforo da tela, através das posições de carga positiva na camada-memória, e «imprime» assim sobre a tela o desenho gravado e retido em memória.

Alguns tubos de retenção são concebidos para exercer uma acção local bistável, que permite uma visualização de intensidade fixa uma vez que tenha sido atingido o limiar da intensidade de impressão. A maior parte dos tubos de retenção são, porém, do tipo de sombreado a meio-tom (ou reticulado), em que a intensidade de visualização varia com a densidade da carga impressa, a dando assim uma gama completa de modulação «Z».

Um tubo de retenção pode ser especificado em termos de um índice de mérito, que é a velocidade limite de impressão para visualização de um único sinal transiente. Isto pode ser convertido num valor de largura de banda de deflexão Y, para uma dada amplitude de

(*) Nota fornecida pela Gould Advance Ltd.

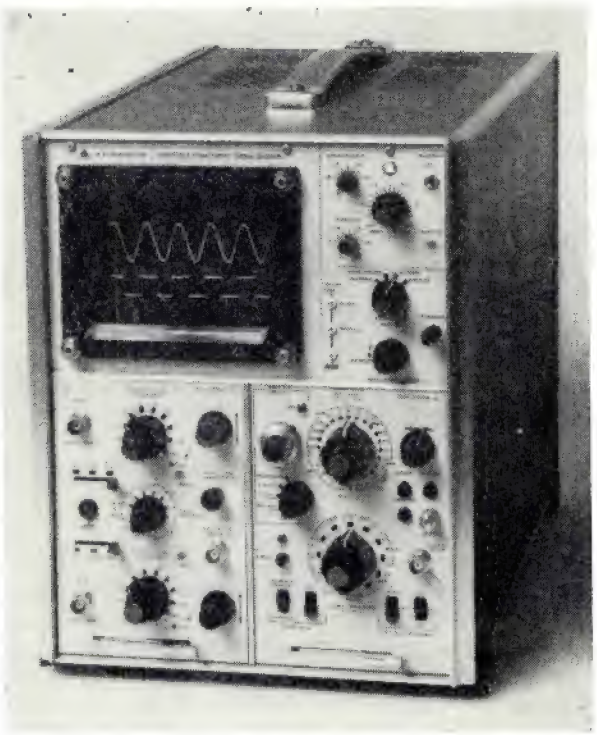


Fig. 1 — O osciloscópio de tubo de retenção OS2200A, da Gould Advance

deflexão. Para uma velocidade de varrido X, que seja baixa em comparação com a velocidade de deflexão, um sinal de 1 cm pico-a-pico pode ser visualizado em detalhe a uma frequência cinco vezes superior do que para um sinal de 5cm pico-a-pico. Se as velocidades de varrido X e Y forem comparáveis, o limite é determinado pela respectiva soma vectorial.

Uma limitação da maioria dos tubos de retenção é que sofrem uma deterioração lenta da qualidade da imagem retida, à medida que a carga se acumula sobre a tela retentora ou se escapa através dela, fazendo com que a visualização se apresente sobre um fundo «esborratado». Em alguns instrumentos, o tempo de retenção pode ser prolongado a várias horas — e possívelmente dias — se se tiver o cuidado de desligar o segundo disparador electrónico (moda «hold») enquanto a imagem não está a ser visualizada. O facto do traço ser retido sob a forma de contornos de cargas sobre um meio isolador, torna possível desligar este tipo de osciloscópios de retenção e prosseguir com o trabalho sem destruir o traço retido — de modo que pode ser visualizado novamente talvez alguns dias depois, quando se ligar outra vez o instrumento.

Inevitavelmente, tem de se chegar a um compromisso no desenho de um tubo de retenção a meios-tons, compromisso esse que jaz entre uma tela insensível, dando baixa velocidade de impressão e longo tempo de retenção, e uma tela sensível, dando alta velocidade de impressão mas uma rápida deterioração da qualidade da imagem devido à acumulação de cargas indesejáveis. A velocidade de impressão é geralmente cotada para todo o tempo de retenção especificado, mas muitas vezes existe um controle de «enhancement (intensificação) ou de «background» (fundo) que permite melhorar a velocidade de impressão durante curtos períodos de visualização.

A velocidade de impressão de um tubo de retenção típico é da ordem de 0,1 cm/μs. No caso de respostas transientes muito rápidas, pode ser manobrado um controle de «fundo» que permite acelerar a velocidade cerca de 10 vezes (até 1 cm/μs), embora com certo detrimento da nitidez de contraste.

Uma vantagem dos tubos de meios-tons é que podem responder a cargas acumuladas durante vários varridos de impressão. Assim, é possível visualizar um traço, que de outro modo seria demasiado rápido para se ver, se se puder fazê-lo repetir-se várias vezes.

Como se disse precedentemente, um osciloscópio de tubo retentor incorpora todas as facilidades normalmente incluídas num osciloscópio usual com facilidades de traço-duplo e alto-ganho Y e ainda um tempo-base de retardo de disparo. É assencial que o tempo-base seja provido de um sistema monocurso, para que possam ser retidas formas-de-onda repetitivas sem o risco de «inundar» o écran.

Um osciloscópio de tubo retentor tem, evidentemente, de incluir circuitos de rasura do traço, por geração de pulsações cíclicas que eliminam a carga acumulada sobre a tela retentora. Além disso, é habitual proporcionar uma série repetida de rápidas pulsações de rasura parcial que causam a deterioração lenta do traço retido. O contrôle deste ritmo de pulsações dá ao traço uma persistência variável para permitir a visualização de formas-de-onda lentas mas repetitivas.

Um recente desenvolvimento é um tubo retentor com uma face dividida em duas partes; um traço pode ser visualizado na metade superior do écran, enquanto que a entrada de corrente é visualizada continuamente na metade inferior, permitindo fazer comparações «antes-e-depois» se for necessário.

Já há vários anos que existem tubos retentores com velocidades de impressão da ordem de 0,1 cm/s a 1 cm/s e tempos de retenção até 1 hora. Os recentes desenvolvimentos na tecnologia de tubos tornaram possíveis velocidades de impressão até 1300 cm/μs. Estes tubos requerem o uso de telas adicionais, para capturar o traço numa delas, e transferi-lo depois para outra onde é visualizado.

A velocidade de impressão determina a largura de banda a que um dado osciloscópio pode ser utilizável para, simples trabalho transiente, se a amplitude de deflexão Y também for definida. Por exemplo, um tubo de velocidade de impressão de 1 cm/us pode seguir um sinal de 5 cm pico-a-pico a cerca de 100 kHz sobre um sinal de 1 cm pico-a-pico a 500 kHz. Esta restrição significa que muitos osciloscópios de retenção só podem ser usados para simples trabalho transiente a bandas de largura muito inferior à do osciloscópio básico. Contudo, como os tubos de meios-tons respondem à carga depositada sobre a tela, é possível obter um traço retido satisfatório a partir de traços repetitivos, à medida que a carga é integrada durante um período de vários ciclos.

Assim, para sinais repetitivos, o osciloscópio pode reter traços até ao limite da largura de banda Y e da velocidade de varrido disponível.

Gravação em banda magnética

A memória dentro de um tubo retentor é, por natureza, volátil e pode ser retida para visualização durante alguns minutos ou, no máximo, algumas horas. Consequentemente, foi preciso procurar outras formas de retenção. A única outra técnica análoga susceptível de aplicação para retenção a longo-prazo é a gravação magnética, e sistemas de banda magnética têm sido adaptados para este fim. Existem gravadores para uso em conjunto com osciloscópios convencionais. Estes instrumentos duplicam o atenuador/amplificador de entrada, o disparador e os circuitos monocurso de um osciloscópio, mas o sinal de disparo é utilizado para iniciar um ciclo de gravação sobre uma pequena laçada de banda contínua. Subsequentemente, o sinal gravado é reproduzido como uma forma-de-onda repetitiva a partir da banda à medida que esta continua a girar. O tempo-base do osciloscópio, regulado para cobrir uma rotação da laçada do banda, é disparado por uma pulsação marcadora aplicada a uma segunda pista da banda no momento em que o ciclo gravador foi disparado. Um sistema deste tipo poderá gravar um sinal transiente a seguir ao disparo, como em qualquer osciloscópio convencional. Contudo, se for reorganizado para gravar continuamente até ser recebido o disparo e em seguida ligado para reproduzir imediatamente, a informação retida e visualizada corresponde aos acontecimentos que levaram ao disparo. Se a acção de disparo for retardada por uma parte do explorador de gravação, os resultados dados retidos são em parte pré-disparo e em parte post-disparo; ou seja o ponto de disparo ocupará uma posição intermediária no traço visualizado. Esta facilidade não pode ser obtida em osciloscópios de tubo de retenção.

Contudo, a gravação magnética é limitada à baixa audio-gama, devido à necessidade de usar uma gravação em frequência modulada para obter uma baixa distorção, o que limita a modulação de frequência superior. Além disso, o comprimento da laçada de banda (tempo de exploração) restringe o uso de baixas frequências. O uso de uma laçada comprida levaria à geração de uma imagem visual tremeluzente num osciloscópio convencional.

Retenção digital

O rápido avanço, durante os últimos anos, na tecnologia de circuitos integrados, levou à concepção de memórias digitais rápidas e económicas que tornaram a retenção digital uma alternativa viável para substituir todos os métodos anteriores.

A ideia básica consiste em isolar amostras do sinal de entrada a intervalos regulares e converter cada nível analógico de amostragem num número dígito. A sequência de números obtidos durante um período de exploração é entrada num retentor digital. Quando subsequentemente os dados são extraídos do retentor, são novamente reconvertidos em níveis analógicos para reconstituir a forma-de-onda original. Uma vez retida sob a forma de informação digital, a forma-de-onda pode ser retida indefinidamente sem risco de deterioração.

Os dados podem ser gravados a uma certa velocidade de amostragem, e depois ser reproduzidos a outra velocidade. Esta vantagem permite gravar lentamente formas-de-onda, e depois reproduzi-las sem qualquer tremulação para visualização no osciloscópio, ou ainda que formas-de-onda rápidas possam ser reproduzidas lentamente para registo de gráficos ou outros fins.

A frequência mais alta que pode ser registada por qualquer sistema é determinada pela máxima velocidade de amostragem de que ele é capaz. Com efeito, um só passo de entrada pode serseguido num único período do cronómetro, mas no caso de forma-de-onda repetitivas, tal como uma onda sinusoidal, será necessário isolar pelo menos quatro amostras por ciclo se se pretende reter a verdadeira essência da onda, ou um número ainda maior conforme o grau de detalhe que seja necessário registar. Além disso, seja qual for a velocidade de amostragem, a qualidade de reprodução depende da resolução digital do sistema na direcção Y. Por exemplo, um sistema binário de 8 «bits» tem 256 estados (ou níveis) separados, e um traço em plena escala, gradual mas lentamente ascendente, apareceria com o aspecto de uma escada de 256 degraus, ou seja aproximadamente um desnível de 0,25% por degrau. Do mesmo modo, a resolução na direcção X, ou amostras por cada exploração gravada, é determinada pela capacidade do retentor. Consequentemente, a velocidade de amostragem, a resolução digital, e a capacidade de retenção são os principais factores do mérito de qualquer sistema.

Embora qualquer sistema seja sempre limitado no extremo superior da sua resposta à frequência, o extremo inferior é apenas limitado pelo período de tempo requerido para encher o bloco de retenção. Se for necessário, isto pode, evidentemente, ser aumentado por simples divisão do ritmo de colheita de amostras, mas será sempre em detrimento da resposta às frequências superiores. Por exemplo, um sistema de 2 MHz com um retentor de 1k, tem uma exploração básica de 500 μs e uma largura de banda de 500 kHz. Com uma divisão cronométrica de 10^6, poderia ter 500 segundos de tempo de exploração com uma largura de banda de 0,5 Hz, mas o osciloscópio baixaria à categoria de registador de gráficos.

A técnica de retenção digital tem sido empregada de maneiras diversas para diferentes aplicações. A conversão de velocidade relativamente baixa tem sido aplicada em certos instrumentos, designados primariamente para aplicações electro-médicas. Operando tipicamente a um regime de amostragem de 200 Hz com resolução a 8 bits e 1k de capacidade de retenção, tais instrumentos permitem visualizar, sem a mínima tremulação, formas-de-onda de sinais correntes ou retidos, para diversas aplicações tais como monitores das pulsações cardíacas.

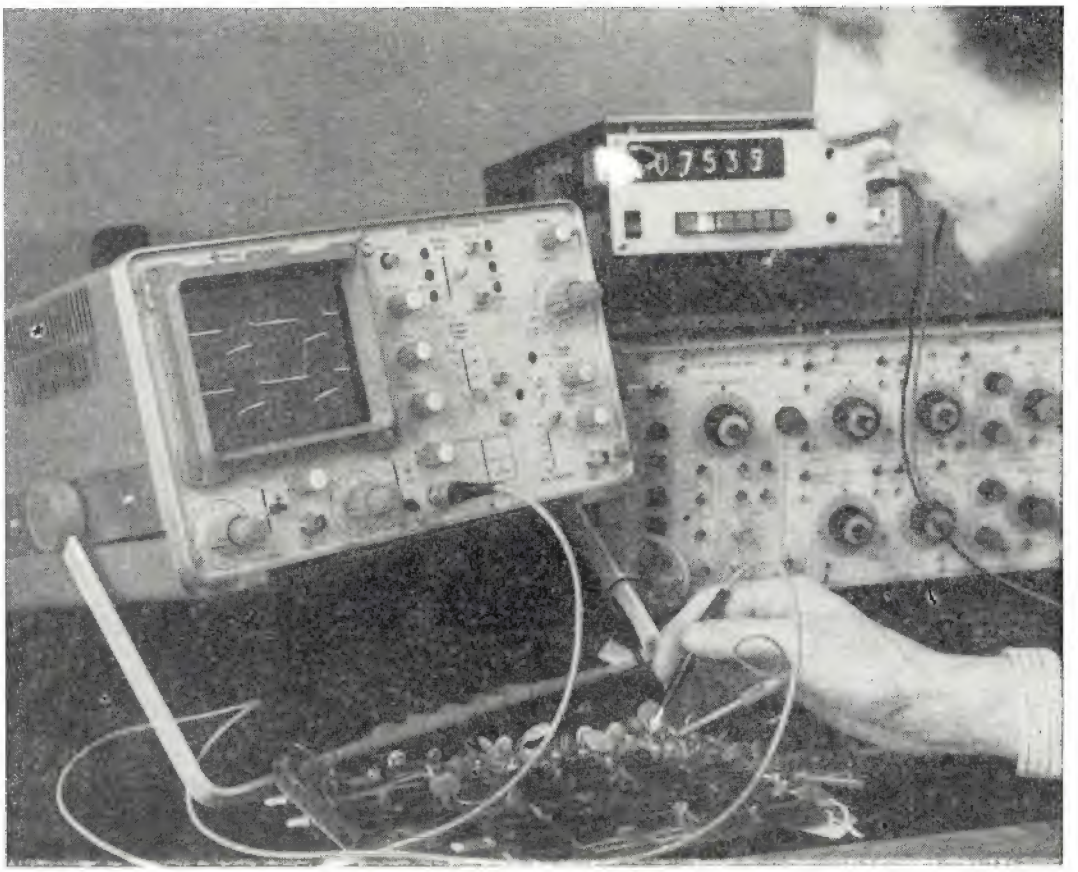


Fig. 2 — O osciloscópio de retenção digital OS4000, da Gould Advance.

No outro extremo da escala, encontram-se sistemas muito sofisticados que não só retêm e visualizam formas-de-onda, mas estão ainda ligados a calculadores programáveis ou a computadores directos para processar os dados na sua forma digital. Este potente dispositivo pode ser empregado em várias aplicações, tais como determinação do valor médio de sinais para fins de rejeição de ruídos, multiplicação de sinais para gerar ofrmas-de-onda de potência a partir de entradas em voltagem ou em intensidade de corrente, correlações entrecruzadas, e análises de transformação Fourier.

Entre estes dois extremos, encontra-se um certo número de instrumentos próprios para o utilizador de osciloscópios convencionais. Os registadores transientes são destinados para uso com osciloscópios existentes. Tal como o gravador de laçada de banda descrito anteriormente, estes registadores duplicam o «extremo anterior» de um osciloscópio, permitindo a retenção de dados e gerando sinais de saída repetitivos com disparo associado, ou sinais de deflexão X para propulsionar qualquer osciloscópio. Um desses instrumentos, designado primariamente para uso com um registador de gráficos, tem as necessárias saídas repetitivas para um osciloscópio, operando com uma resolução de 10 bits a 500 kHz para alimentação de um retentor de 2k. Outros são mais «obras-de-arte» na sua capacidade de conversão analógica-digital com uma resolução de 8 bits ao regime cronométrico de 10 MHz, ou 1k de retenção.

Modelos integrados

A Gould Advance produziu recentemente o que se pensa ser o primeiro osciloscópio convencional que incorpora facilidades de retenção digital. Um sistema de 1k de retenção a 2 MHz e 8 bits é integrado num osciloscópio normal de duplo canal. Com plena entrada Y, tempo-base e facilidades de disparo, este sistema pode funcionar como um osciloscópio convencional ou como um osciloscópio de tubo de retenção, enquanto que proporciona ao mesmo tempo as facilidades adicionais apenas possíveis com meios digitais. As funções de controle e o layout geral foram concebidos para assegurar a simplicidade de operação e para permitir que seja «propulsionado» como qualquer outro osciloscópio, mesmo na moda digital.

No modo normal de operação, é um osciloscópio convencional. Quando se liga para «refreshed», o sistema digital é posto em operação. Os sinais de disparo seleccionado começam então a fazer explorações dos dados entrados para o retentor em vez de explorações do tempo-base. O controle de tempo/cm selecciona a velocidade de entrada de dados em vez da velocidade de exploração do tempo-base. Entretanto, os dados acumulados no retentor são lidos em ciclos rápidos e continuamente repetidos para engendrar a visualização. Assim, com sinais de entrada repetitivos, a visualização segue

o sinal de entrada, como na moda Normal. Contudo verifica-se uma vantagem a baixas velocidades de exploração, visto que a informação visualizada permanece nítida e isenta de tremulação, mas vê-se que o sinal da actualização continua a progredir através do écran mesmo que o sinal mude entre sucessivos movimentos de exploração. A mesma fixidez de visualização é também observada a rápidas velocidades de exploração, mesmo se o ritmo de disparo for lento. Se o disparo for interrompido, o último traço é retido automaticamente. Este modo de operação pode ser usado vantajosamente nos casos em que tiver sido usada persistência variável em instrumentos de tubo de retenção.

Sinais transientes são normalmente capturados em osciloscópios de tubo de retenção, por meio de rasura do écran e activação do circuito monocurso. Esta função está integrada no botão «Store» (retenção) do modelo OS4000, permitindo assim a impressão de um ciclo completo disparado, antes de ser cortada completamente a impressão. Dados gravados previamente são rasurados automaticamente à medida que dão entrada novos dados.

Um bloqueio de sobreposição pode ser aplicado em qualquer altura aos dados acumulados no retentor, permitindo assim que o instrumento seja usado na moda Normal, mas com a possibilidade de reproduzir os traços retidos sempre que isso seja necessário. Um botão adicional bloqueia os dados retidos, mas apenas para amostras alternadas, e como resultado a visualização subdivide-se em dois traços, um dos quais é retido e o outro fica livre para seguir o fluxo de entrada. Este efeito pode ser comparado, em aplicações práticas, ao obtido em tubos retentores de écran subdividido mas neste caso os dois traços podem ser sobrepostos sobre toda a área do écran.

O funcionamento na moda «Refreshed» descrita acima corresponde ao funcionamento disparado de outros osciloscópios. Quando se liga a moda «Roll», os dados são alimentados no retentor continuamente ao ritmo seleccionado no cronómetro, ao mesmo tempo que a visualização dos dados previamente acumulados prossegue continuamente como antes. A visualização resultante contem um ciclo complexo de exploração de «história passada», e pode ser comparada a um tempo-base de circulação livre sem interrupções por períodos de exploração retrógrada. O traço parece mover-se para a esquerda à medida que é actualizado do lado direito, como sucede quando se observa a visualização de um registador de banda através duma janela de 10 cm.

Isto pode ser particularmente útil com sinais de movimento lento, visto que a velocidade de exploração pode ser reduzida para 20 s/cm (200 segundos de exploração), mas o traço pode ser imobilizado manualmente em qualquer altura.

Se o botão «Store» (retenção) for accionado na moda «Roll», o efeito é semelhante ao descrito para o sistema de laçada de banda magnética. A impressão pode ser parada e a visualização imobilizada no momento do disparo, ou — conforme tenha sido seleccionado — pode deixar continuar a exploração durante 1/4, 1/2 ou 3/4 do seu comprimento, antes de a parar. A resultante visualização dos acontecimentos ocorridos antes do disparo, ou rodeando o disparo, apresentará um ponto mais brilhante que indica o momento do disparo.

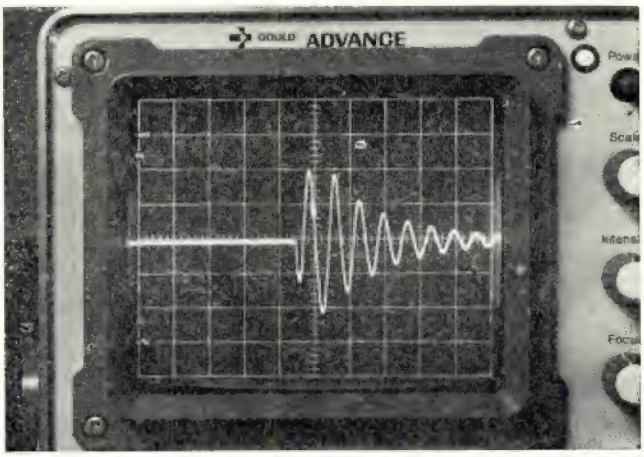


Fig. 3 — Forma-de-onda transiente retida, contendo 50% de informação pré-disparo e 50% post-disparo, mostrando claramente o marcador do ponto de disparo.

Como a fonte de disparo pode ser seleccionada internamente a partir de qualquer traço, ou externamente, isto constituirá um poderoso meio de detecção e análise de avarias não repetitivas e para os inúmeros problemas transientes de gravação que se deparam em tais campos constitui um meio de análise de choque ou análise explosiva.

Em todas as modas acima, a deflexão X pode ser ampliada até 10 vezes para exame detalhado de qualquer parte do traço, e o funcionamento em duplo canal pode ser usado em todas as modas, com excepção do traço subdividido.

Amostragem

Em todos os sistemas digitais, o processo essencial de amostragem limita a qualidade da forma-de-onda reconstituída, dependendo da resolução digital nos dois eixos X e Y. A maioria dos sistemas incluem pelo menos 1 k de retenção, pelo que o espaçamento das amostras não é visível num écran de 10 cm, e nem sequer é intrusivo com 10 vezes de ampliação. Contudo, podem aparecer efeitos detupados se o sinal de entrada alternar a uma frequência próxima do ritmo de amostragem. A reconstituição de uma forma-de-onda pode aparecer como uma mixórdia sem sentido se for apresentada como uma série de pontos. Este problema foi solucionado no modelo OS4000 por meio de uma técnica de junção de pontos que faz aparecer o traço como uma série de linhas direitas entre níveis sucessivos, de modo que o olhar não detecta imagens ilusivas não obstante a densidade normal escolhida para amostras X.

Mesmo assim, se o ritmo de amostragem se aproximar, ou for inferior, à frequência do sinal de entrada, o efeito de redução de frequência que é usado tão vantajosamente em osciloscópios de amostragem, levará

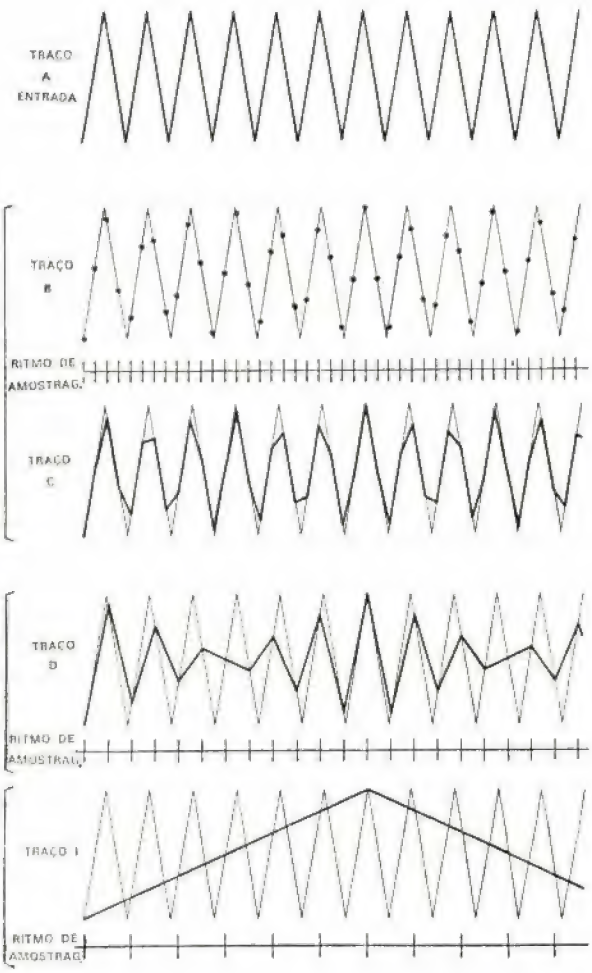


Fig. 4 — Representação gráfica da técnica de junção de pontos usada no modelo OS4000 da Gould Advance.

neste caso à criação de traços deturpados. O modelo OS4000 retém a possibilidade de reverter à operação normal, como medida da contraprova em muitas circunstâncias.

Argumentos em favor e contra e factores económicos

Quando se comparam instrumentos digitais com os instrumentos de tubo retentor de tipos já mais estabelecidos, parece que o sistema digital oferece muitas vantagens em relação ao tubo, no caso de trabalho a frequências baixas ou médias. Devido ao seu ritmo cronométrico de 2 MHz, o OS4000 pode ser utilizado até cerca de 400 kHz.

A velocidade de impressão não é um parâmetro fundamental dum sistema digital, e só pode ser definida em associação com o grau de distorção permitindo numa dada forma-de-onda. A possibilidade de seguir um sinal de 5 cm pico-a-pico a 400 kHz implica uma velocidade de impressão da ordem de 10 cm/μs. Alternativamente, o seguimento de um bordo ascendente com amostras verticais espaçadas de 1 cm, implica uma velocidade de 2 cm/μs. Neste contexto, o custo básico do OS4000 é muito competitivo em relação à maioria dos osciloscópios de tubo que têm apenas velocidades de impressão de 0,1 μs/cm ou 1 μs/cm, e oferece muitas vantagens funcionais. Um argumento adicional contra o uso de modelos de tubo neste campo, é o alto custo da substituição do próprio tubo cuja vida é, muitas vezes, de duração relativamente curta.

Quando se abandona esta comparação directa, as coisas mudam de rumo visto que os requisitos divergem e os custos podem aumentar rapidamente.

Os modelos digitais oferecem todas as vantagens associadas ao processamento simples e complexo da forma-de-onda após retenção, mas as velocidades de impressão, ou seja os ritmos cronométricos, são normalmente limitados a cerca de 10 MHz. No futuro, é muito provável que isto possa ser aumentado pelo uso de dispositivos de retenção acoplados e de recarga rápida.

Os instrumentos à base de tubo oferecem indiscutivelmente a possibilidade de rápidas velocidades de impressão que, em virtude de recentes desenvolvimentos, podem atingir pelo menos 1 000 cm/μs em exploração simples. Formas-de-onda repetitivas podem ser capturadas usando a técnica de integração, que só é limitada pela largura de banda do osciloscópio básico. Muitos tubos oferecem ainda a possibilidade de impressão a meios-tons que não existe nos instrumentos digitais. A retenção em tubo permite a visualização simultânea de traços sucessivos, o que, no caso de instrumentos digitais, só é possível se existirem sistemas de retenção adicionais ou compartimentados.

Como em tantos casos em que se trata da selecção de instrumentos, há sempre «uns cavalos melhores que outros para determinado tipo de corridas», mas os instrumentos de retenção digital são agora «vencedores» em muitos campos.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 435

Ano LI — Outubro 1976

C. D. U. 378/5.001:621(76)

R. MINDLIN

Técnica N.º 435 — LI — 11-1976, p. 1 a 4

ENSINO E INVESTIGAÇÃO EM MECANICA NOS ESTADOS UNIDOS

O artigo dá informação sobre a organização do ensino e investigação no domínio da Mecânica nos Estados Unidos. Foi apresentado pelo autor durante a última sessão, dedicada ao Ensino e à Investigação em Mecânica, do 1.º Congresso Português de Mecânica Teórica e Aplicada (Dezembro de 1974).

C. D. U. 517:624.04

E. R. ARANTES OLIVEIRA

Técnica N.º 435 — LI — 11-1976, p. 5 a 10

SOME APPLICATIONS OF FUNCTIONAL ANALYSIS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF STRUCTURES

As analogias formais entre modelos estruturais, assim como o problema da geração de modelos a partir de outros modelos, caem dentro do âmbito da Teoria Matemática das Estruturas a qual pode ser portanto formulada em três partes: um modelo genérico, regras para gerar modelos a partir de outros modelos, uma justificação para tais regras. O presente trabalho considera essas diferentes partes, recorrendo à Análise Funcional como o quadro matemático adequado à formulação da teoria.

C. D. U. 512

JOSÉ DE MATOS LOPES TEIXEIRA

Técnica N.º 435 — LI — 11-1976, p. 11 a 46

PROGRAMAÇÃO LINEAR COM RELEVO PARA A PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E AS VARIÁVEIS BOOLEANAS

Este trabalho, resultante da reunião de dois temas por nós tratados no último ano da Licenciatura em Ciências Matemáticas, é dedicado acima de tudo à Programação Linear. Na sua Parte 1 cinge-se principalmente ao estudo, um tanto pormenorizado embora, do Método do Simplex Dual tentando apoiá-los numa base matemática sólida e simultaneamente aplicá-los a alguns problemas simples de modo a completar a sua compreensão. Na Parte 2, aproveitando o estudo anterior, dedicamo-nos à Programação Linear Inteira debruçando-nos em particular sobre os algoritmos de Gomory e de Balas por nos parecerem de grandes possibilidades pela enorme gama de problemas que podem enfrentar. E a natureza do segundo algoritmo levou-nos a um tratamento especial de transformação de variáveis inteiras em variáveis booleanas. Programamos ainda estes algoritmos na linguagem A.P.L. apresentando de seguida as listagens de alguns problemas simples resolvidos pelo computador.

C. D. U. 532.7:002

J. C. CONTE

Técnica N.º 435 — LI — 11-1976, p. 47 a 58

SOBRE O PROBLEMA DA DIFUSÃO DE RUTHERFORD

Discute-se o problema da interacção de uma partícula de carga eléctrica positiva que se aproxima de outra partícula também de carga eléctrica positiva mas suposta em repouso. É deduzida a equação genérica da trajectória em função da velocidade inicial e da massa da partícula incidente, das cargas das partículas e do parâmetro de choque. Em particular considera-se o caso de o parâmetro de choque ser nulo.

C. D. U. 69.002:658.012.1

S. POMPEU DOS SANTOS

Técnica n.º 435 — LI — 11-1976, p. 59 a 72

MATRIZ DOS COEFICIENTES TÉCNICOS DA INDÚSTRIA DA CONSTRUÇÃO

A análise de relações interindustriais, correntemente designada por análise «Input-autput» visa o conhecimento das relações quantitativas existentes entre os vários sectores duma economia através do estabelecimento da respectiva Matriz de relações interindustriais ou quadro «Input-output». No entanto o instrumento de análise com interesse prático é a Matriz dos coeficientes técnicos (modelo «Input-output») que se obtém da primeira mediante a introdução de certas hipóteses. Quando se pretende um conhecimento mais preciso das relações interindustriais dum Sector económico faz-se a sua desagregação em subsectores e elabora-se a respectiva Matriz de coeficientes técnicos sectorial.

Neste trabalho faz-se a determinação da Matriz dos coeficientes técnicos em unidades físicas do Sector da indústria da Construção para o ano de 1970, desagregando (em Sectores) tanto o produto do Sector — obras — como os consumos — materiais. Foram considerados 13 Sectores de Obras e 36 Sectores de Materiais de Construção. No capítulo 1 apresentam-se algumas considerações sobre análise interindustrial bem como a metodologia de elaboração da Matriz. No capítulo 2 apresenta-se a nomenclatura de Sectores considerada com a definição pormenorizada do conteúdo de cada Sector e a especificação das respectivas unidades de produção. No capítulo 3 refere-se o sistema de recolha da informação; o modo de obtenção de projectos e a descrição da operação «análise de projectos». No capítulo 4 apresenta-se o método de cálculo dos coeficientes técnicos para cada Sector de obras bem como algumas considerações sobre os coeficientes técnicos calculados.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 435

LI — October 1679

C. D. U. 532.7:002

J. C. CONTE

Técnica N.° 435 — LI — 11-1976, p. 47 a 58

SOBRE O PROBLEMA DA DIFUSAO DE RUTHERFORD

The problem of the interaction between two positively charged particles of which one is assumed to be in rest is discussed. The general equation of the trajectory of the moving particle is deduced for given conditions for mass and initial velocity of the incident particle, electrical charge and impact parameter. As a particular case the where the impact paramenter is zero is discussed.

C. D. U. 69.002:658.012.1

S. POMPEU DOS SANTOS

Técnica n.° 435 — LI — 11-1976, p. 59 a 72

MATRIZ DOS COEFICIENTES TÉCNICOS DA INDÚSTRIA DA CONSTRUÇÃO

The object of «input-output» analysis is to know the inter-relationships that exist, between the various parts of a national economy through the establishment of the respective «input-output» table. Nevertheless, the analysis instrument with pratical interest is the Technical coefficients Matrix, the so called «input-output» model, which is obtained from the first one assuming certain hypotheses. When one wishes to obtain a more perfect knowledge of the inter-relationships of a economic sector one does the desagregation in subsectors and elaborates the respective Sectorial Matrix of the technical coefficients.

This paper describes the method of obtaining the Technical coefficients Matrix in physical units of Construction industry Sector in 1970, desagregation the product of Sector — works —, and the consomattions — materials. 13 «Works sectors» and 36 «Construction materials sectors» where considered. Chapter 1 presents some considerations about «input-output» analysis, as well as the methodology for the elaboration of the Matrix. Chapter 2 presents the nomenclature considered for the Sectors, with the complete definition of the content of each Sector and the specification of the respective production units. Chapter 3 presents the information retrieval systhem; the way of abstaining the projects and the description of the operation «project analysis». Chapter 4 presents the calculation method of technical coefficients on each «Works sector», as well as some considerations about the technical coefficients calculated.

C. D. U. 378/5.001:621(76)

R. MINDLIN

Técnica N.° 435 — LI — 11-1976, p. 1 a 4

EDUCATION AND RESEARCH IN MECHANICS IN THE U.S.A.

Information is given about the organization of Education and Research in the field of Mechanics in the U.S.A. The paper was presented by the author during the last session, devoted to Education and Research in Mechanics, of the First Portuguese Congress on Theoretical and Applied Mechanics (December 1974).

C. D. U. 517:624.04

E. R. ARANTES OLIVEIRA

Técnica N.° 435 — LI — 11-1976, p. 5 a 10

SOME APPLICATIONS OF FUNCTIONAL ANALYSIS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF STRUCTURES

The formal analogies between structural models, together with the generation of models from other models, fall within the scope of the Mathematical Theory of Structures which therefore may be formulated as consisting of three parts: a generic model, rules for generating models from other models, a justification for those rules. The present paper considers all such parts and resorts to Functional Analysis as an adequate mathematical frame for formulating the theory.

C. D. U. 512

JOSÉ DE MATOS LOPES TEIXEIRA

Técnica N.° 435 — LI — 11-1976, p. 11 a 46

PROGRAMAÇÃO LINEAR COM RELEVO PARA A PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E AS VARIAVEIS BOOLEANAS

This work is a resultant of two former papers which have been prepared as a part of the requirements for the graduation in mathematics and deals with Linear Programming. Part 1 is mainly a study, with certain details, of the simplex and the dual simplex methods, seen from the point of view of a rigorous mathematical approach aiming at the same time to apply them to simple problems in order to get a good understanding. On the basis of the theory previously developed, Part 2 deals with Integer Linear Programming, with a special enphasis on the algorithms of Gomory and Balas which proved to be of particular interest because of their extreme versatility to attach concrete problems. The nature of second algorithm has led to the usage of boolean variables instead of integer variables. Both algorithms have been coded in A.P.L.; as a part of the work we also show listings of the outputs of some easy problems solved on a computer.

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ÍNDICE POR ASSUNTOS DOS ARTIGOS PUBLICADOS

NÚMEROS 429 A 434 VOLUME XXXVII OUTUBRO DE 1975 A MARÇO DE 1976

Artigo	N.º	Data	Pág
007 — ACTIVIDADE E ORGANIZAÇÃO EM GERAL: INFORMAÇÃO, COMUNICAÇÃO E TEORIA DO CONTROLE EM GERAL, CIBERNÉTICA, INCLUINDO «ENGENHARIA HUMANA»			
C. D. U. 007			
Do conhecimento e da acção ..... *António Gouvêa Portela*	429	10-975	1
C. D. U. 007:51.951			
Introdução aos conjuntos vagos ... *António Gouvêa Portela*	433	2-976	201
33 — ECONOMIA POLÍTICA — ECONOMIA			
C. D. U. 330.115			
Análise de multiplicadores intersectoriais ..... *Marco António Monteiro d'Oliveira*	434	3-976	241
C. D. U. 331.8.00:378.12			
Sobre a reestruturação da carreira docente nas universidades portuguesas (dedicação exclusiva; natureza dos cursos; Autonomia) ..... *José Quintino Rogado*	433	2-976	175
338 — PRODUÇÃO. CRIAÇÃO DA RIQUEZA. SITUAÇÃO ECONÓMICA			
C. D. U. 338.982:662			
Nota sobre a apropriação dos recursos minerais. Programador nacional de empreendimentos mineiros. ..... *José Quintino Rogado*	434	3-976	281
37 — EDUCAÇÃO			
C. D. U. 378.12:331.8.00			
Sobre a reestruturação da carreira docente nas universidades portuguesas (dedicação exclusiva; natureza dos cursos; autonomia) ..... *José Q. Rogado*	433	2-976	175
5 — CIÊNCIAS PURAS			
51 — MATEMÁTICA			
C. D. U. 51.951:007			
Introdução aos conjuntos vagos ... *António Gouvêa Portela*	433	2-976	201
C. D. U. 518:532.516			
Convergence of finite element solutions in viscous flow problems ..... *E. R. Arantes e Oliveira*	432	1-976	139
C. D. U. 518.3:624.07			
Reflexões sobre a evolução da engenharia de estruturas ... *E. R. Arantes e Oliveira*	431	12-975	103
C. D. U. 519.283.001			
A investigação operacional na pós-graduação em engenharia civil: proposta duma estrutura de cursos unificados	434	3-976	235
53 — FÍSICA			
532 — MECÂNICA DOS FLUIDOS. HIDROMECÂNICA			
C. D. U. 532.5:621-135			
Análise teórica das características mecânicas de um escoamento radial numa turbomáquina centrífuga ..... *António A. S. de Barros*	430	11-975	47
C. D. U. 532.516:518			
Convergence of finite element solutions in viscous flow problems ..... *E. R. Arantes e Oliveira*	432	1-976	139
C. D. U. 532.517.4.001.57			
The Applicability of turbulence models and the experimental techniques for their verification ..... *J. J. Delgado Domingos* *D. F. G. Durão* *J. H. Whitelaw*	434	3-976	265
C. D. U. 532.54			
Limite superior do número de Froude em canais prismáticos e escoamento uinforme ..... *António Betâmio de Almeida*	432	1-976	167

Artigo N.º Data Pág

C. D. U. 532.543.011.1

Utilização de modelos aerodinâmicos no estudo de problemas fluviais 429 10-975 13
F. Lacerda e Megre
L. Veiga da Cunha

533 — MECÂNICA DOS GASES. AEROMECÂNICA.

C. D. U. 533.27.5:536

Termodinâmica molecular do gás perfeito 430 11-975 67
J. A. Martinho Simões
C. A. Nieto de Castro

536 — CALOR. TERMODINÂMICA

C. D. U. 536:533.27.5

Termodinâmica molecular do gás perfeito 430 11-975 67
J. A. Martinho Simões
C. A. Nieto de Castro

537 — ELECTRICIDADE

C. D. U. 537.311:621.389

Obtenção por simulação numérica da distribuição em energia de uma população de electrões 433 2-976 219
H. J. S. Abreu Santos

62 — ENGENHARIA E TECNOLOGIA EM GERAL.
620 — ENSAIOS E ACÇÕES FÍSICAS E QUÍMICAS SOBRE OS MATERIAIS.

C. D. U. 620.19.013:669.018

«Electrochemical basis of metallic corrosion in melts» 429 10-975 33
C. A. C. Sequeira

621 — ENGENHARIA MECÂNICA. ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA.

C. D. U. 621-135:532.5

Análise teórica das características mecânicas de um escoamento radial numa turbomáquina centrífuga 430 11-975 47
António A. S. de Barros

C. D. U. 621.039

Aproveitamento da energia nuclear 434 3-976 273
F. M. Moreira Serpa
M. A. Rei Vilar

669 — METALURGIA

C. D. U. 621.316.825.4:621.373

Oscilações auto-excitadas num circuito condensador-termistor . 431 12-975 89
J. F. Borges da Silva
J. M. Viegas Gonçalves

Artigo N.º Data Pág

C. D. U. 621.374

Máquina de turing para converter expressões em notação «infix» em expressões em notação «postfix» — I. definição da máquina e redução de estados 431 12-975 117
L. T. Magalhães
M. P. O. Ricou

C. D. U. 621.389:537.311

Obtenção por simulação numérica da distribuição em energia de uma população de electrões .. 433 2-976 219
H. J. S. Abreu Santos

624 — ENGENHARIA CIVIL

C. D. U. 624.07:518.3

Reflexões sobre a evolução da engenharia de estruturas 431 12-975 103
E. R. de Arantes e Oliveira

C. D. U. 624.074

Cálculo de Estruturas reticuladas no espaço 432 1-976 155
e 433 2-976 183

627 — CURSOS DE ÁGUA E CANAIS NATURAIS. RIOS, PORTOS, OBRAS PORTUÁRIAS E COSTEIRAS: BARRAGENS, ETC.

C. D. U. 627.31/32

Orientação do projecto de docas secas (estaleiro naval da Setenave, Setúbal) 430 11-975 81
J. M. Gonçalves Figueira

628 — ENGENHARIA E TECNOLOGIA SANITÁRIAS.

C. D. U. 628.5

Sobre a aplicabilidade dum modelo à previsão da poluição atmosférica 429 10-975 25
M. Teresa Pontes

66 — INDÚSTRIAS QUÍMICAS

662 — EXPLOSIVOS. COMBUSTÍVEIS.

C. D. U. 662:338.982

Nota sobre a apropriação dos recursos minerais. Programador nacional de empreendimentos mineiros 434 3-976 281
José Quintino Rogado

C. D. U. 669.018:620.19.013

Electrochemical basis of metallic corrosion in melts 429 10-975 33
C. A. C. Sequeira

681 — MECANISMOS, APARELHOS E MÁQUINAS DE PRECISÃO. INSTRUMENTOS.

C. D. U. 681.14.016

Uma bibliografia de APL 431 12-975 127
J. Marques Henriques

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECÂNICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TÉCHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CÂMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges & Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração-Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRÁFICO DO EXÉRCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção-Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique
Instituto dos Produtos Florestais

— CENIM

— CORTIÇA
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Provincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento Mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industrial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L'E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIÁRIO DOS ELASTÓMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de l'Information de l'Organization des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais da Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ)

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins de fer et de L'Union Internationale des Chemins de fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

BIBLIOTECA
DO
DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA
MECÂNICA

OFERTA

VICENTE FERREIRA E BRAZÃO FARINHA

TABELAS TÉCNICAS

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES
DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - LISBOA

7ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA

PREÇO 250.00

DESC. 10% AOS ASSINANTES

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA